

$$P_{12} = \pm 1 \rightarrow$$

$P_{12} = 1$

$$P_{11} = P_{22} \rightarrow$$

$$\mu + 2 - p_{22}^2 = 0$$

$$p_{11} = p_{22} = \sqrt{\mu + 2}$$

הפער בין יחידות תל כ"ן כולל $P > 0$:

$$\rho = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu+2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}$$

$$K = R^{-1} B^T P$$

$$K = [1] \cdot [0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = [p_{12} \ p_{22}]$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 1 \\ h_2 &= \sqrt{\mu+2} \end{aligned} \right\}$$

∴ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$ (1)

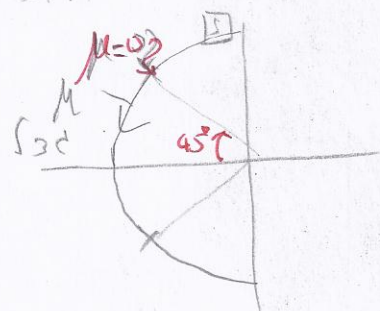
$$u = -x_1 - \sqrt{2} \cdot x_2$$

1. $\mu = 0$. $\cancel{218}$ (2)
(23N or 5,0N)
(3212)

$$\Delta(s) = s^2 + \frac{2\zeta\omega_0}{\omega_0^2} s + 1$$

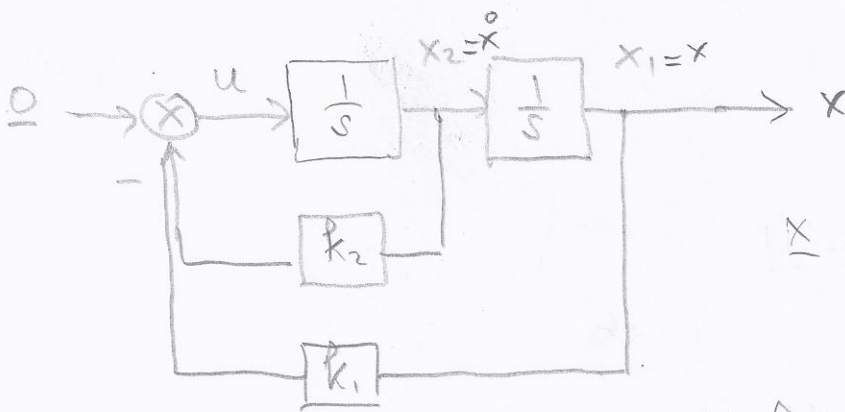
$$2f\omega_0 = \sqrt{2} \quad \omega_0 = 1$$

$$\boxed{f = \frac{1}{2} \sqrt{2}}$$



full state feedback

3/13



$$\underline{x} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2 \times 1 \\ 1 \times 1 \end{matrix}$$

$$\underline{u} \triangleq u = -\underbrace{[k_1 \ k_2]}_K \cdot \underline{x} = -K \cdot \underline{x}$$

$$J = \int_0^{\infty} (\underline{x}^T Q \underline{x} + u^2) dt$$

x_1 for $\int_0^{\infty} u^2 dt$ (2×1)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

x_2 for $\int_0^{\infty} u^2 dt$ (1×1)

$\mu \geq 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \cdot u$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + B \cdot u$$

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad ; \text{A.R.E.}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_P + \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A$$

$$- \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_P +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}}_Q = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_0$$

$$J = \underline{x}(0)^T P \underline{x}(0)$$

$$\frac{\partial J}{\partial K}$$

1. K מצוינות (אופטימום) P מתקבל

$$J(K) \Leftarrow J = \underline{x}(0)^T P \underline{x}(0) - \gamma \quad P \text{ נתון} \quad 2$$

$$\frac{\partial J}{\partial K} = 0 \quad \text{נדרש} \quad 3$$

$$\underline{u} = -K \underline{x} \quad \text{התוצאה היא} \quad K \Leftarrow$$

$$\frac{\partial J}{\partial K}$$

$$(e, k, s) \quad R = S^T S$$

$$R > 0 \quad \text{כ"ן} \quad (PD)$$

$$[A - BK]^T P + P[A - BK] + Q + K^T S^T S K = 0$$

$$A^T P + P A - \underbrace{K^T B^T P + P B K}_{\text{התוצאה היא}} + (SK)^T (SK) + Q = 0$$

$$P B K = P B S^{-1} (SK)$$

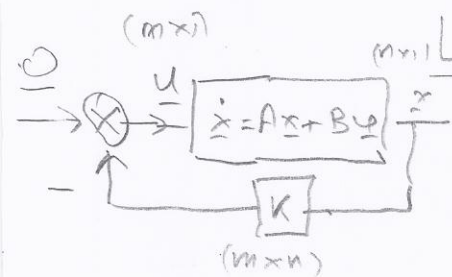
$$K^T B^T P = (SK)^T (S^T)^{-1} B^T P$$

$$(SK)^T (SK) - (SK)^T (S^T)^{-1} B^T P - P B S^{-1} (SK) =$$

$$= \underbrace{[SK - (S^T)^{-1} B^T P]}_a^T \underbrace{[SK - (S^T)^{-1} B^T P]}_b - \underbrace{P B S^{-1} (S^{-1})^T B^T P}_{R^{-1}}$$

$$A^T P + P A + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

$$J = \underline{x}^T(0) P \underline{x}(0)$$



$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -K \cdot x \quad \text{full state feedback}$$

$$J = \int_{t=0}^{\infty} (\underbrace{x^T Q x}_{\text{state}} + \underbrace{u^T R u}_{\text{control}}) dt$$

$$\begin{matrix} \text{PD} & Q \geq 0 \\ \text{PD} & R > 0 \end{matrix}$$

$$J \rightarrow K \rightarrow \text{LQR}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax - B \cdot K \cdot x = \underbrace{[A - BK]}_{\triangleq A_{cl}} x = A_{cl} \cdot x$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt = \\ &= \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T \overline{K}^T R K \cdot u) dt = \int_0^{\infty} x^T \underbrace{[Q + \overline{K}^T R K]}_{\overline{Q}} x dt \end{aligned}$$

$$A_{cl} = A - BK$$

$$\overline{Q} = Q + K^T R K$$

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} = -\overline{Q}$$

$$\underbrace{[A - BK]^T}_{A_{cl}^T} P + P \underbrace{[A - BK]}_{A_{cl}} = -\underbrace{(Q + K^T R K)}_{\overline{Q}}$$

(3d) :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\triangleq e \\ x_2 &\triangleq \dot{e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\xi \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}}$$

$$J = \int_{0^+}^{\infty} (e^2 + \mu \dot{e}^2) dt = \int_{0^+}^{\infty} (x_1^2 + \mu x_2^2) dt$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} dt = \int_{0^+}^{\infty} \underline{x}^T Q \underline{x}$$

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

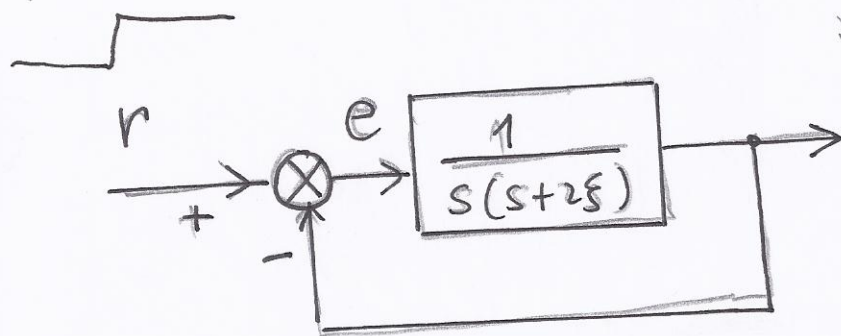
$$J = \underline{x}^T(0^+) P \underline{x}(0^+)$$

so the P is

$$A^T P + P A = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} -2p_{12} &= -1 \\ p_{11} - 2\xi p_{12} - p_{22} &= 0 \\ 2p_{12} - 4\xi p_{12} - p_{22} &= \mu \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} \xi + \frac{1+\mu}{4\xi} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1+\mu}{4\xi} \end{bmatrix}$$



הערכות של

(הערכות) $r(t) = u(t)$ וזה $p > \xi > 0$ לכן

הערכות של $J = \int_0^{\infty} (e^2 + \mu \dot{e}^2) dt$ (!!! $\dot{e}$! e from u)

$$e = r - \frac{1}{s(s+2\xi)} e$$

$$\left[1 + \frac{1}{s(s+2\xi)} \right] e = r$$

$$e = \frac{s(s+2\xi)}{s^2 + 2\xi s + 1} \cdot r(s)$$

$$e(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{s(s+2\xi)}{s^2 + 2\xi s + 1} \cdot \frac{1}{s} = 1$$

$$\ddot{e} + 2\xi \dot{e} + e = \ddot{r} + 2\xi \dot{r}$$

$$\Leftarrow \dot{r}(0) = 0 \quad \dot{r}(0) = 0 \quad \Leftarrow r(t) = u(t)$$

$$\ddot{e} + 2\xi \dot{e} + e = 0$$

$$e(0) = 1 \quad \dot{e}(0) = 0 \quad \therefore \text{הערכות של}$$

אם A PLC , Liapunov $\sim$ Q PD -

יש P PLC $\sim$ Q PD Q PD

$\sim$ Q PD P $A^T P + P A = -Q$

P PLC $\sim$ Q PD

$$J = \int_0^{\infty} \underline{x}^T Q \underline{x} dt = -\underline{x}^T P \underline{x} \Big|_0^{\infty} =$$

$$-\underline{x}(\infty)^T P \underline{x}(\infty) + \underline{x}(0)^T P \underline{x}(0)$$

(אם $\underline{x}(\infty) = 0$)

$$\Leftrightarrow \underline{x}(\infty) = 0 \Leftrightarrow A \text{ is stable}$$

$$J = \underline{x}(0)^T P \underline{x}(0)$$

J PLC $\sim$ Q PD Q PD

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{\theta}} = 0 \Rightarrow A \text{ is stable}$$

μ $\sim$ PLC

Lyapunov's theorem for stability

Let $\dot{x} = Ax$ be a linear system

$$\dot{x} = Ax$$

Let A be a constant matrix. The system is stable if and only if the eigenvalues of A have negative real parts. $x=0$ is the equilibrium point.

Let A be a constant matrix. The system is stable if and only if the eigenvalues of A have negative real parts.

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x$$

Let Q be a symmetric positive definite matrix. Then the system is stable if and only if there exists a symmetric positive definite matrix P such that $A^T P + P A = -Q$.

$$x^T Q x = -\frac{d}{dt} [x^T P x]$$

Let P be a symmetric positive definite matrix. Then the system is stable if and only if there exists a symmetric positive definite matrix P such that $A^T P + P A = -Q$.

$$\begin{aligned} x^T Q x &= -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} = -x^T A^T P x - x^T P A x \\ &= -x^T [A^T P + P A] x \end{aligned}$$

LQ → "LQR" → "Linear Quadratic Regulator"
(Linear Quadratic Optimal Control)
"LQR"

$$\underline{\underline{X}}^0 = A \underline{\underline{X}} + B \underline{\underline{u}}$$

$$J(\underline{x}, \underline{u}) = \int_0^{\infty} (\underbrace{\underline{x}^T Q \underline{x}}_{\text{"cost of } \underline{x}} + \underbrace{\underline{u}^T R \underline{u}}_{\text{"cost of } \underline{u}}) dt$$

$$-1.6 \times 10^{-10} \quad Q \gg 0$$

$$-10 \text{ G N } 10 \quad R \sim 0$$

○ — אן סטאטוס בן זון דאסער האלדאט —

$$u(H) = -K \cdot x$$

full state feedback

[illegible]

1920 188 JAPAN K Phodas 316N -
Riccati 510N

→ 582 Riccati $y' = 1 - 3y$ —
Laplace — Ge

$$\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^T Q \underline{x} = -x_3^2$$

$$\underline{1 \ 5 \ 13 \ 2}$$

$$(\dot{x}_3 = 0) \iff x_3 = 0 \iff \dot{V}(\underline{x}) = 0 \text{ p/c -}$$

$$(\dot{x}_1 = 0) \iff x_1 = 0 \iff \dot{x}_3 = -Kx_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 = 0 \iff \dot{x}_1 = x_2 = 0$$

only simultaneous in $\dot{V}(\underline{x}) = 0 \Rightarrow \delta$

1" $\delta = 5 \ 5 \ 13 \ 2$ p/c

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ Q^{1/2} A \\ Q^{1/2} A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & -K & 1 \end{bmatrix} = 3 \quad \begin{matrix} \text{1" } \delta \\ K \neq 0 \end{matrix}$$

$$A^T P + P A = -Q \quad \text{1" } \delta \text{ - Lien. - } \underline{1 \ 5 \ 13 \ 2} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\text{donc } \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 6$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ogata P909
Example 13-5

PD $-10-$
($Q > 0$, (A, B) controllable) : 3 $\in$ $N(13)$

המערכת היא:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\dot{x}$ A x

$$x = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0$$

נ"ע נ"ע
(הערה)

המערכת היא ליניארית (כלומר $\dot{x} = 0$ כאשר $x = 0$)
בבואה זו נבדוק את המערכת על ידי שימוש בשיטת פאלי.

1) פאלי נבדקת על ידי פאלי:

$$V(x) = x^T P x \quad (P > 0, \text{ PD})$$

(הפונקציה היא קוואדראטית)

$$2) \text{ באותה צורה } Q = I \quad (Q > 0, \text{ PD})$$

3) באותה צורה

$$P \text{ PD}$$

$$A^T P + P A = -I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-2P_{12} = -1$$

$$P_{11} - P_{12} - P_{22} = 0$$

$$2P_{12} - 2P_{22} = -1$$

$$3/2 > 0 \quad \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

4) המערכת היא ליניארית

המערכת היא ליניארית (כלומר $\dot{x} = 0$ כאשר $x = 0$)
בבואה זו נבדקת המערכת על ידי שימוש בשיטת פאלי.

-Q-

בדיקת יציבות מערכת ליניאר בעזרת ליאפאנוב (ליטור)

נתון מערכת דינאמית ליניאר מסדר n

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$$

נניח A על סקאלרית, כלומר יש n מצב ש"מ גלוי דמיים. לבדוק את יציבות מצב זה בעזרת ליאפאנוב.

נניח: $V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x}$ כאשר $P > 0$ (PD) וסימטרית (רגולרית חיובית)

$$\dot{V} = \dot{\underline{x}}^T P \underline{x} + \underline{x}^T P \dot{\underline{x}} = (A \underline{x})^T P \underline{x} + \underline{x}^T P A \underline{x}$$

$$\dot{V} = \underline{x}^T [A^T P + P A] \underline{x} = -\underline{x}^T Q \underline{x}$$

$$Q \triangleq -[A^T P + P A] \quad \text{כאשר}$$

עכשיו $V(\underline{x})$ הוא פונקציה ליאפאנוב

אם $Q > 0$ (PD)

מסקנה ליאפאנוב עבור מערכת ליניאר!

הכאשר הינן מצב ש"מ וצוק אלסימטרית (ללא אולי) במערכת $\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$ אם P (אם והקיום - גילוי

הכרחי + מספיק) עבור כל מצבים וסימטרית $Q > 0$ (PD) ואז למשל:

$$A^T P + P A = -Q$$

שאינו
סימטרית
 $P > 0$

פירוש סימטריות, וחיצונית מולדת חלק PD

סיבה שחיתוך קוצם את Q ולכן יש קבוצים של P ש $Q > 0$ וסימטרית
גילוי הכרחי + מספיק $V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x}$ עליו פונקציה ליאפאנוב.

אם חתכים לפני: אם בחיתוך קוצם את P (ודגש על סימטריות
לחלוטין שחיתכה וצוק, Q לא קיימת PD לחלוטין סימטרית ולכן!

- d 8 -

$$\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^T N \underline{x} = -\underline{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a p_2 \end{bmatrix} \underline{x} = -a p_2 x_2^2 \leq 0$$

$\|\underline{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\underline{x}) \rightarrow \infty$ $p \in \mathbb{N}$, PSD $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0 \quad \forall \delta$

לכל $\delta > 0$ קיים $\epsilon > 0$ כך שכל $\|\underline{x}(0)\| < \epsilon$ יתקיים $\|\underline{x}(t)\| < \delta$ לכל $t \geq 0$

הוכחה

לכן:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -k \cdot x_1 - a x_2$$

$\dot{x}_2 = 0$, $x_2 = 0$ $\forall \underline{x} \quad \dot{V}(\underline{x}) = 0$

$$\dot{x}_2 = -k \cdot x_1 - a \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

כלומר, כל נקודה שבה $\dot{V}(\underline{x}) = 0$ היא נקודה שבה $\underline{x} = 0$

לכן, $\underline{x} = 0$ היא נקודת איזון יציבה.

→ 8 -

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - ax_2 \end{cases}$$

let's see
! 3'1'1 N''e 23N

$$\dot{\underline{x}} = 0 \Rightarrow \underline{x} = 0$$

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2} P_1 x_1^2 + \frac{1}{2} P_2 x_2^2$$

$$\dot{V}(\underline{x}) = P_1 x_1 \dot{x}_1 + P_2 x_2 \dot{x}_2 = P_1 x_1 x_2 + P_2 x_2 (-kx_1 - ax_2)$$

$$= P_1 x_1 x_2 - P_2 k x_1 x_2 - a P_2 x_2^2 = (P_1 - P_2 k) x_1 x_2 - a P_2 x_2^2$$

$$\dot{V}(\underline{x}) = \underline{x}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{P_1 - P_2 k}{2} \\ \frac{P_1 - P_2 k}{2} & -a P_2 \end{bmatrix}}_{\triangleq -N} \underline{x} = -\underline{x}^T N \underline{x}$$

$$N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(P_1 - P_2 k)}{2} \\ -\frac{(P_1 - P_2 k)}{2} & a P_2 \end{bmatrix}$$

(PSD) $N \geq 0$ p/c $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$; $\forall \underline{x} \neq 0$

for life - let's see if p's in N are positive definite
(o d l c l l c p l a n)

(1) $a P_2 \geq 0$

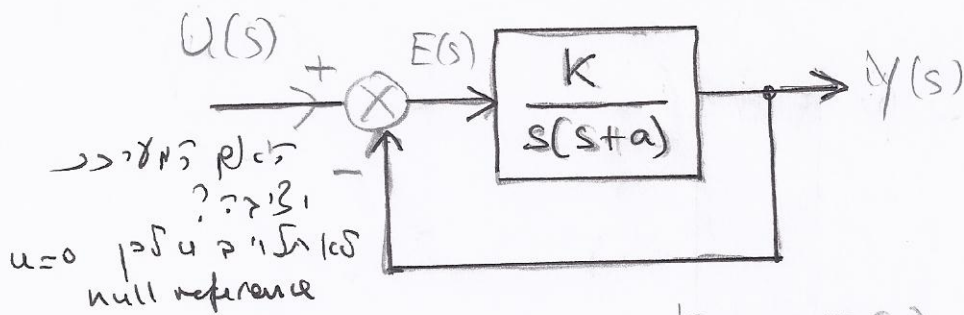
(2) $-\left(\frac{P_1 - P_2 k}{2}\right)^2 \geq 0$

$P_2 > 0$ $a > 0$; $P_1 \neq N$ (1)

$k > 0 \Leftrightarrow P_1 = k P_2 \Leftrightarrow P_1 - P_2 k = 0$ p/c if $P_1 \neq N$ (2)

- 8 -

② 11d13



(NSP) $\dot{V}(x) \leq 0$

$$a > 0$$

$$E(s) = U(s) - \frac{k}{s(s+a)} E(s) \Rightarrow$$

$$\left[1 + \frac{k}{s(s+a)}\right] E(s) = U(s) \Rightarrow \frac{s^2 + as + k}{s(s+a)} E(s) = U(s)$$

$$E(s) = \frac{s(s+a)}{s^2 + as + k} \cdot U(s)$$

המערכת יציבה

$$\ddot{e}(t) + a\dot{e}(t) + ke(t) = 0$$

המערכת יציבה כי כל הריבועים שליליים

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\triangleq e \\ x_2 &\triangleq \dot{e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{x}^T P \underline{x}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}$$

$$p_1 > 0$$

$$p_2 > 0$$

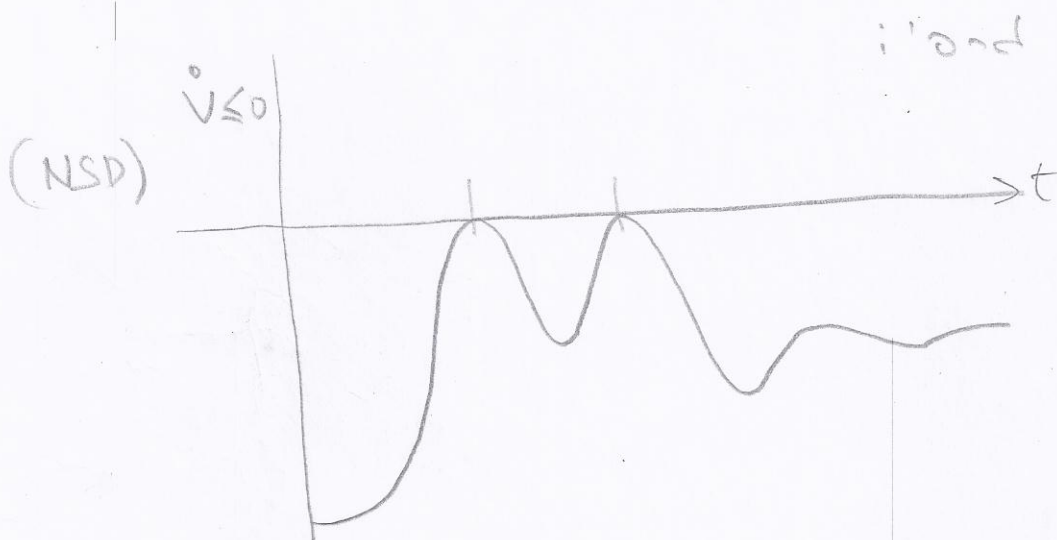
המערכת יציבה (PD) $P > 0$ $P \delta$

- 7 -

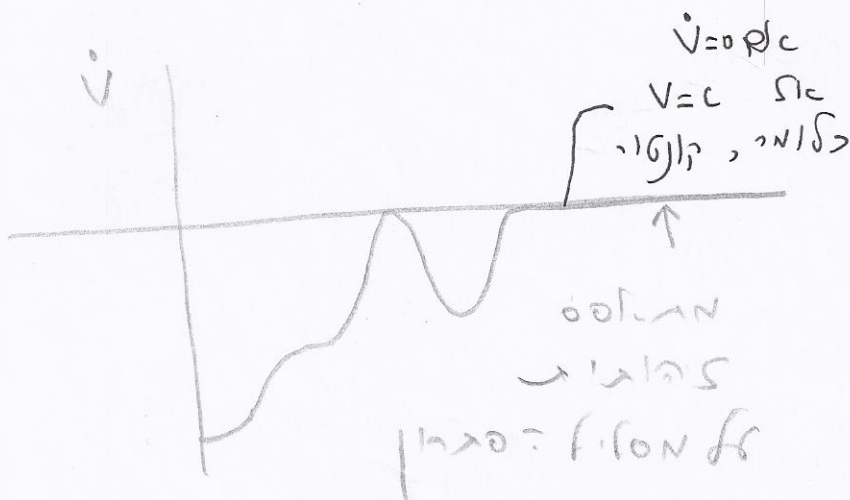
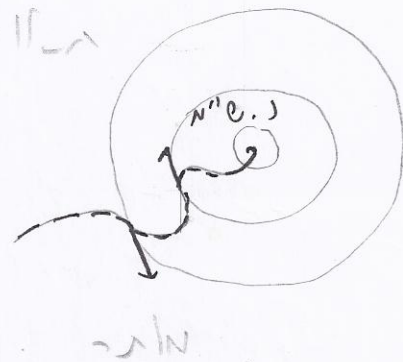
for ~~ND~~ $\frac{dV}{dt} < 0$ e $\dot{V} < 0$
 : $\dot{V} < 0$ e $\dot{V} < 0$ μ ρ α α

NSD $\frac{dV}{dt} \leq 0$ -

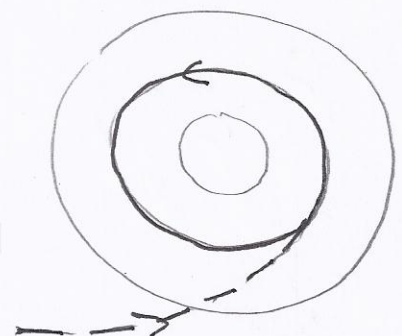
for continuous $\dot{V}(x,t)$ -
 $\dot{x} = f(x,t)$ e $\dot{V}(x,t)$ $\dot{V} < 0$ $\dot{V} < 0$



and all



and



and all

משפט ליאפונאף (משפט 1)

אם $\dot{x} = f(x, t)$ אז M ע"מ N קטן

כאשר $f(0, t) = 0$

המשפט וז"ל: אסימפטוטי הסביבה
הוא אם קיימת פונקציה סקלרית $V(x, t)$
(פונקציה ליאפונאף) המקיימת:

① $V(x, t)$ חיפה והיא נמשכת חיפה

N קטן M קטן N קטן

② $V(x, t) > 0$ עבור $x \neq 0$, $V(0, t) = 0$

③ $(ND) \frac{d}{dt} V(x, t) < 0$

④ אם קיים δ קטן ϵ קטן

$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x, t) \rightarrow \infty$

אם אסימפטוטי הוא ליאפונאף

המשפט: אם $V(x) > 0$ $V(x) = c$ הוא ליאפונאף

סדר קטן הוא הוא הוא

אם $V(x) < 0$ אז $V(x)$ וז"ל $V(x)$ קטן

הוא קטן $V(x)$ וז"ל $V(x)$ קטן

הוא x (הוא $V(x) = c$) הוא $V(x)$ קטן

ואם $\Leftarrow$ הוא קטן $V(x)$!

בדיקת סימיות

$$V(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 \quad \text{PD}$$

$$V(\underline{x}) = (x_1 + x_2)^2 \quad \text{PSD}$$

$$V(\underline{x}) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2 \quad \text{ND}$$

הפונקציה אינה קבועה, ולכן אינה
היא קבועה, ולכן אינה
היא קבועה, ולכן אינה

$$V(\underline{x}) = x_1x_2 + x_2^2 \quad \text{IND}$$

$$V(\underline{x}) = x_1^2 + \frac{2x_2^2}{1+x_2^2} \quad \text{PD}$$

(Quadratic Form) הצגת פונקציה

הפונקציה $V(\underline{x})$ היא פונקציה קוואדראטית
היא קוואדראטית

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x}$$

המטריצה P היא מטריצה סימטרית

$$V(\underline{x}) = [x_1, x_2, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & & \\ & & \ddots & \\ p_{1n} & & & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(Definiteness)

צבירה על אינדינ

$\underline{x}$ צבירה על $V(\underline{x})$ אינדינ צבירה
(PD) (Positive Definite) "אינדינ" אינדינ

$$\left. \begin{array}{l} V(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0} \\ V(\underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{0} \end{array} \right\} \text{plc}$$

(אינדינ צבירה) Positive Semidefinite PSD

$$V(\underline{x}) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0}$$

$$V(\underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$$

PD אינדינ $-V(\underline{x})$ plc ND

(אינדינ ל-5) INDEFINITE

ל-5 PSD, ND, PSD, P.D ל-5 צבירה, אינדינ plc

אינדינ ל-5

פ"ל ל-5 + פ"ל אינדינ אינדינ $V(\underline{x})$ plc

אם $\dot{V}(\underline{x}) < 0$ אז $\underline{x} \in N$ וכל $\underline{x} \in N$ מקיים $\dot{V}(\underline{x}) < 0$

$$p_1 - p_2 k = 0$$

$$\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ap_2 \end{bmatrix} \underline{x} = -ap_2 x_2^2 \leq 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - ax_2 \end{cases}$$

אם $\dot{V}(\underline{x}) = 0$ אז $x_2 = 0$ וכל $\underline{x} \in N$ מקיים $\dot{V}(\underline{x}) = 0$

אם $\dot{x}_2 = 0$ אז $-kx_1 - ax_2 = 0$

$$-kx_1 - ax_2 = 0$$

אם $x_1 = 0$ אז $x_2 = 0$ וכל $\underline{x} \in N$ מקיים $\dot{V}(\underline{x}) = 0$

$$V(\underline{x}) \rightarrow \infty \quad \|\underline{x}\| \rightarrow \infty$$

אם $\dot{V}(\underline{x}) < 0$ אז $\underline{x} \in N$ וכל $\underline{x} \in N$ מקיים $\dot{V}(\underline{x}) < 0$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -k \cdot x_1 - a x_2$$

אם β_1 ו- β_2 הם
הערות

$$V(x) = \frac{1}{2} p_1 x_1^2 + \frac{1}{2} p_2 x_2^2 \quad \text{כאן } p_1, p_2 > 0$$

$$p_1 > 0$$

$$p_2 > 0$$

אם β_1 ו- β_2 הם הערות

$$\dot{V}(x) = -x^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(p_1 - p_2 k)}{2} \\ -\frac{(p_1 - p_2 k)}{2} & a p_2 \end{bmatrix} x$$

$\triangleq N$

$$ND \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \text{כאן } \beta_1$$

$\Leftrightarrow$ הפונקציה N היא פונקציה קואדריטית

$$(1) \quad a p_2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ p_2 > 0 \end{cases}$$

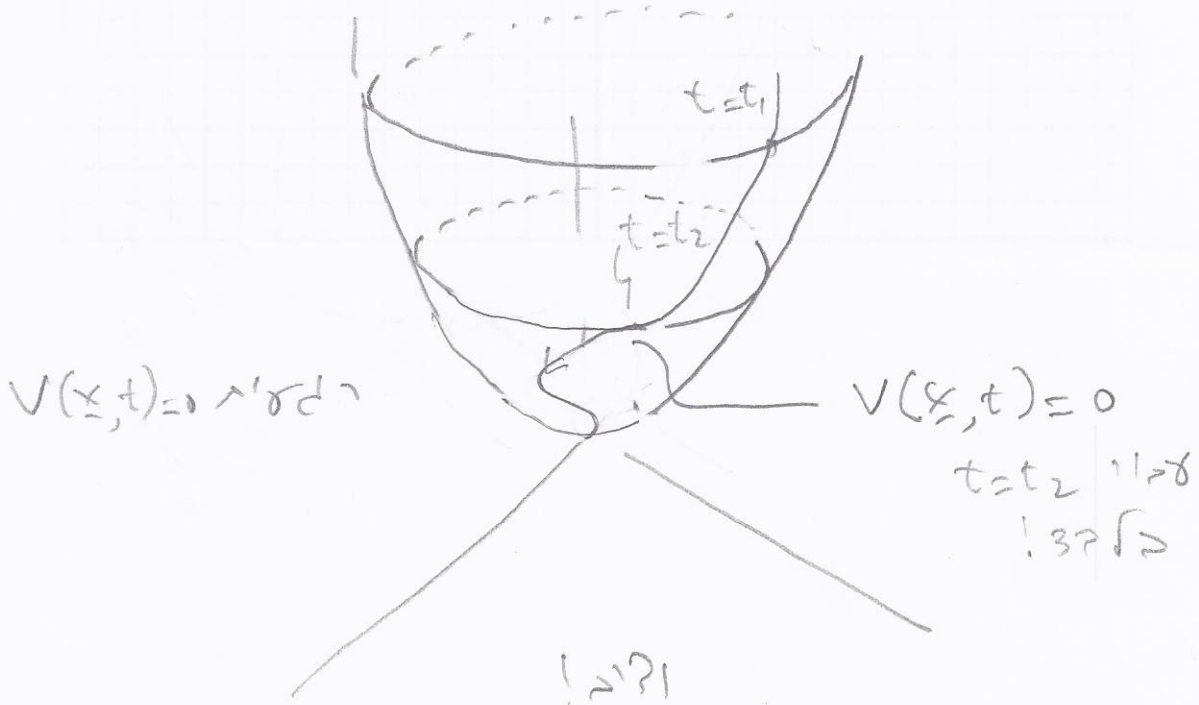
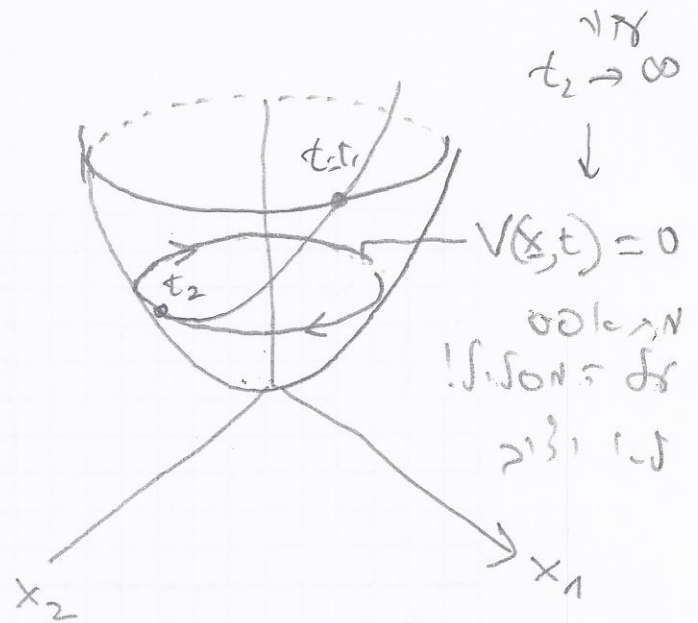
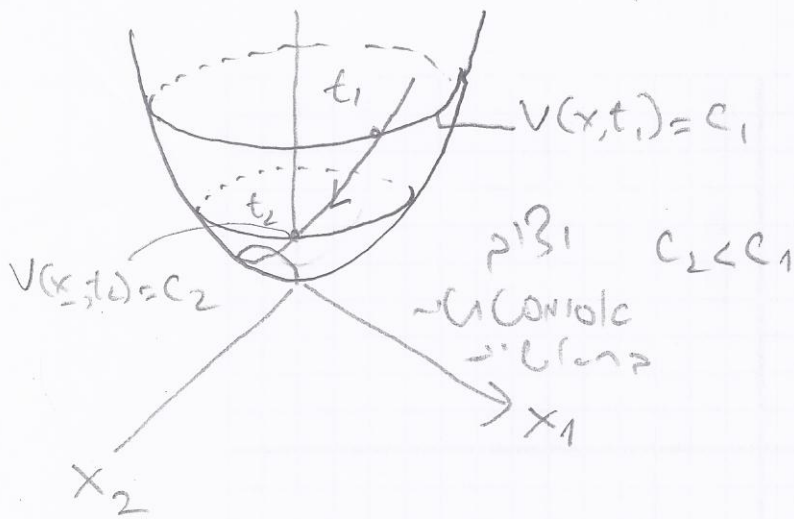
$$(2) \quad -\left(\frac{p_1 - p_2 k}{2}\right)^2 > 0 \Rightarrow \text{כאן}$$

$$p_1 = p_2 \cdot k$$

אם β_1 ו- β_2 הם הערות

$$\begin{cases} p_1 > 0 \\ p_2 > 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{k > 0}$$

$$V(x,t) < 0$$



אסימטות

מקב"ל x_0 וקיי δ וקיי ϵ אסימטות $\phi(t; x_0, t)$ $t \rightarrow \infty$

① אסימטות מקב"ל x_0

② כל גודל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כזה שכל x_0 המקיים $\|x_0 - x_e\| < \delta$ יהיה $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$ לכל $t \geq t_0$

כל x_0 המקיים $\|x_0 - x_e\| < \delta$ יהיה $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$ לכל $t \geq t_0$

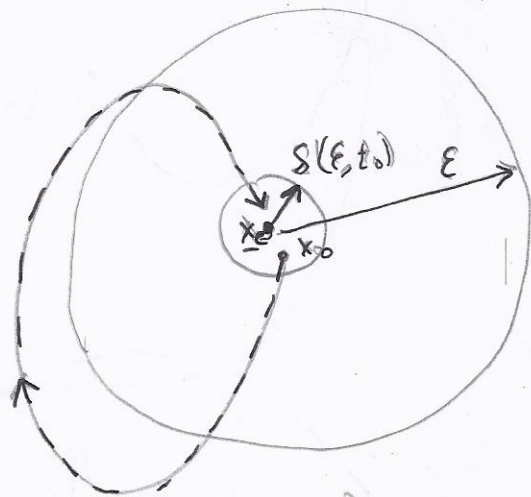
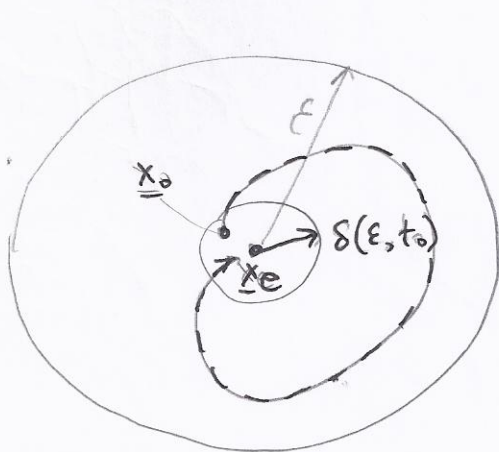
Domain of attraction $\triangleq$ $\{x_0 \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e\}$

אסימטות מקב"ל

כל x_0 המקיים $\|x_0 - x_e\| < \delta$ יהיה $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$ לכל $t \geq t_0$

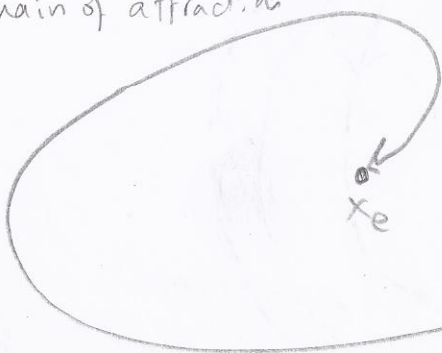
Asymptotically Stable in the Large

or Globally stable



אסימטות מקב"ל
within domain of attraction

כל δ וקיי ϵ



$x_0 \leftarrow$ δ ϵ δ ϵ

אסימטות מקב"ל

אסימטות

$$\delta(\varepsilon, t_0) > 0 \quad \text{for } \varepsilon > 0$$

$\|x(t_0) - x_e\| \leq \delta(\varepsilon) : \underline{x}_e \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } f(\underline{x}_e) = 0$
 $\exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \delta(\varepsilon) > 0$

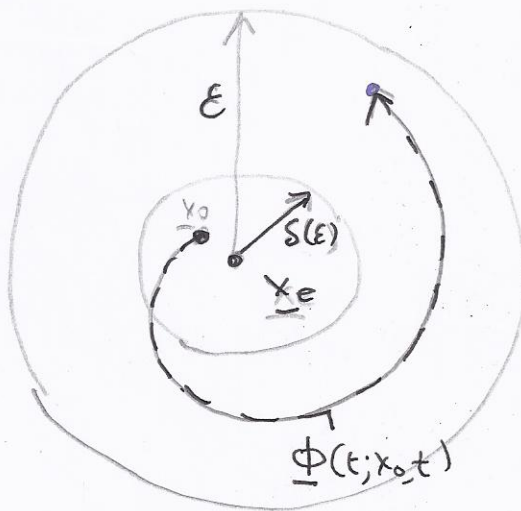
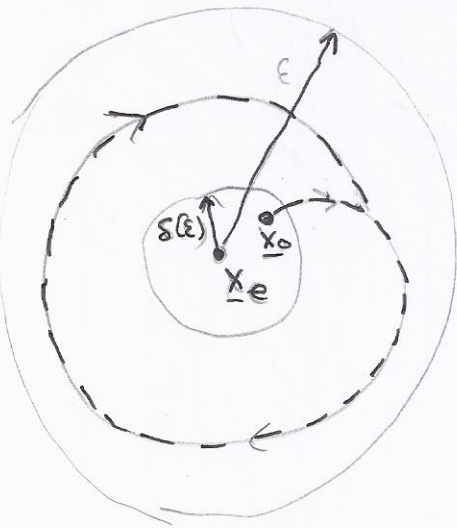
$$\forall t > t_0 \quad \|\phi(t; \underline{x}_0, t_0) - \underline{x}_e\| \leq \varepsilon$$

Norm - 5.28 L

$$\|X - X_e\| = \sqrt{(x_1 - x_{1e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2}$$

Handwritten:

"Flat ISN"



: 1185

מחזור ע"מ קמא
ט"ו סוף חלק א' פס'
י"א " מחזור קמא "
(Limit Cycle)
כחמישי, גרוע -
אלו צרכים - מקב'
מחזור ע"מ .

$\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(x+t)| < \epsilon$ $\iff$ f is uniformly continuous.

השדה הדיפרנציאלי של המרחב הזמן-מרחב

(1892)

— נציג את המרחב הזמן-מרחב:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$$

המרחב הזמן-מרחב

— נניח שיש למערכת משוואות דיפרנציאליות, $\underline{x}' = \underline{f}(\underline{x}, t)$

המרחב הזמן-מרחב: $\underline{x}_0 = \underline{x}(t_0)$

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t; \underline{x}_0, t_0)$$

המרחב הזמן-מרחב:

— נניח שיש למערכת משוואות דיפרנציאליות, $\underline{x}' = \underline{f}(\underline{x}, t)$

$$\underline{f}(\underline{x}_e, t) = \underline{0} \quad \forall t$$

המרחב הזמן-מרחב, קבועים

$$\underline{f}(\underline{x}, t) = A \underline{x}$$

— נניח שיש למערכת משוואות דיפרנציאליות, $\underline{x}' = A \underline{x}$ סטציונרית

— נניח שיש למערכת משוואות דיפרנציאליות, $\underline{x}' = A \underline{x}$ סטציונרית

— נניח שיש למערכת משוואות דיפרנציאליות, $\underline{x}' = A \underline{x}$ סטציונרית

המרחב הזמן-מרחב