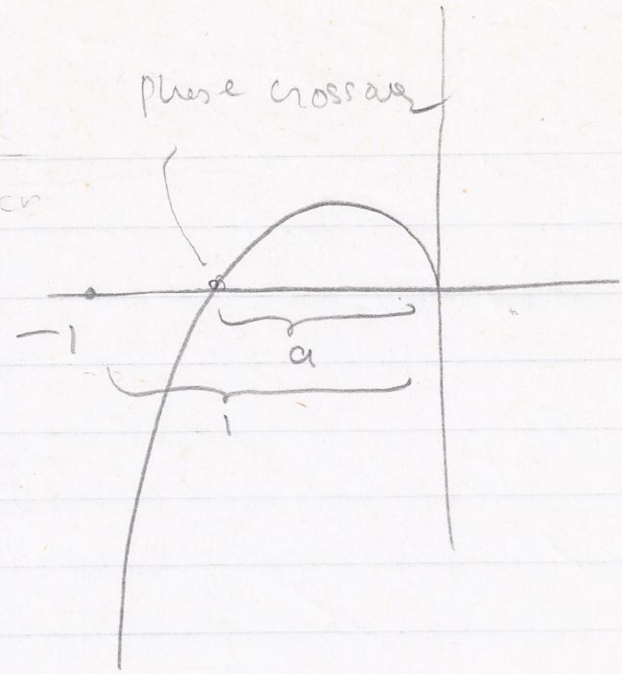
④



gain - margin

$$K_{cr} = 6$$

נניח

$$GH(j\omega_c) = -\frac{k}{6} = -\frac{K}{K_{cr}}$$

$$G.M = \frac{K_{cr}}{K} = \frac{1}{|GH(\omega_c)|} = \frac{1}{a}$$

$$K = 3$$ לאור

$$G.M = \frac{6}{3} = 2$$

D_b ?

$$20 \log \frac{1}{|GH(\omega_c)|}$$

$$20 \log 2 = 6 \ db$$

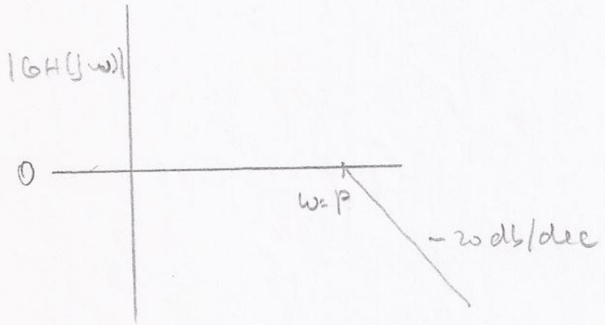
BODE Sketching rules:

(1)

$$GH(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{p} + 1\right)} \qquad GH(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{p} + 1\right)}$$

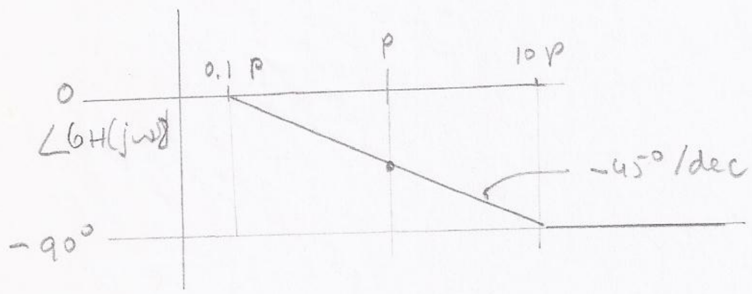
$$|GH(j\omega)| = -20 \log \sqrt{\frac{\omega^2}{p^2} + 1}$$

$$\angle GH(j\omega) = \operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{p}\right)$$

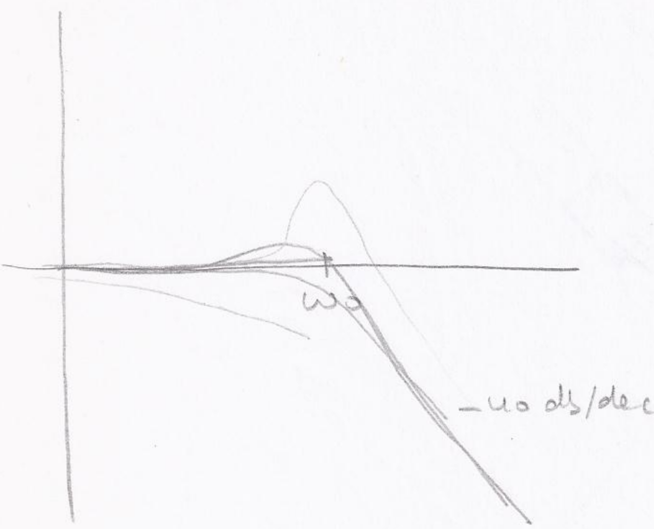


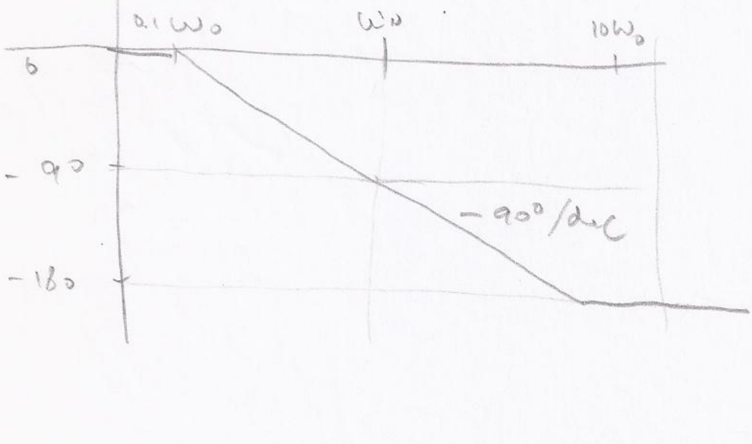
$\omega \gg \;\rightarrow\; -20 \log \frac{\omega}{p}$

$\omega \ll \;\rightarrow\; -20 \log 1 = 0$



$$GH(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\frac{\zeta}{\omega_0}s + 1} = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}j}$$





8/12/80

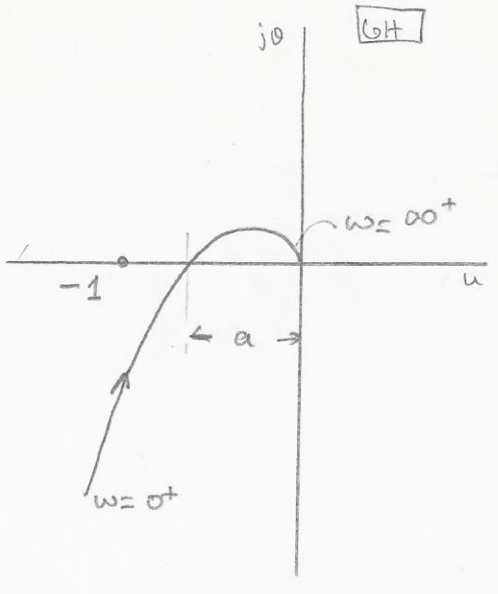
Gain margin:

$$G.M. = \frac{1}{a} = \frac{1}{|GH(j\omega_c)|}$$

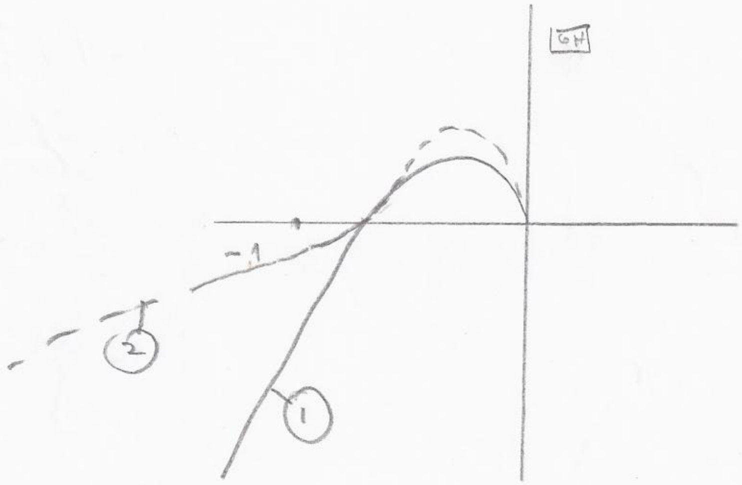
$$G.M. = \frac{K_{cr}}{K}$$

$$G.M._{db} = 20 \log\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$G.M._{db} = 20 \log\left(\frac{K_{cr}}{K}\right)$$



בכמה dB ניתן להגדיל את ההגבר K עד שהמערכת
נכנסת לאי יציבות.



ה G.M. שווה ב 1 ו 2 אולם הדבקה ←
מערכת 2 בכל זאת פחות יציבה!

Phase - Margin:

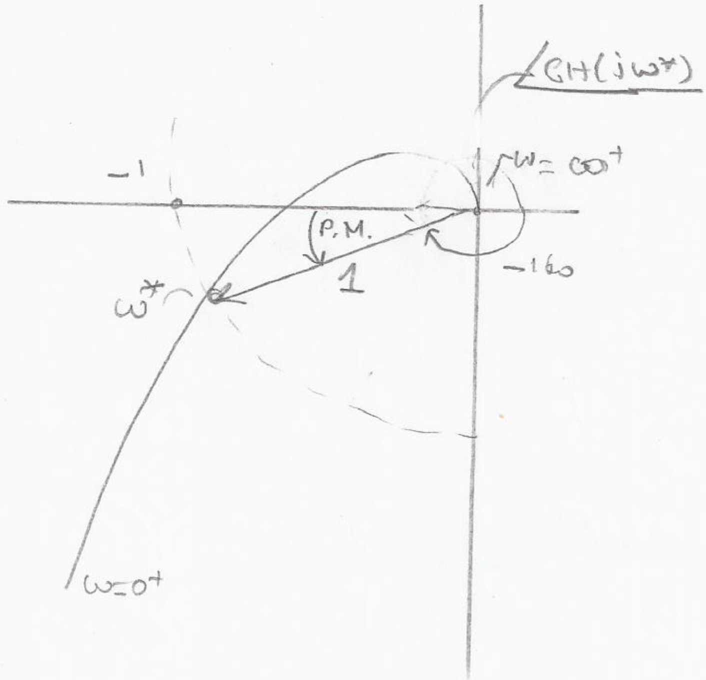
$\omega^* =$ "gain" crossover

$$P.M = \underline{\angle GH(j\omega^*)} - 180^0$$

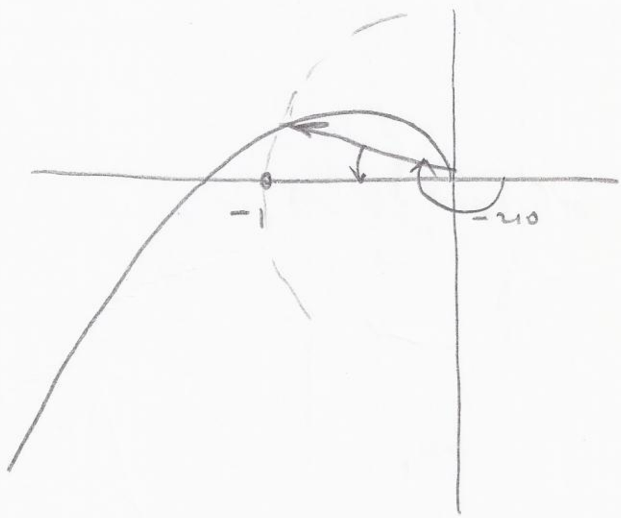
לדוגמה:

$\angle GH(j\omega^*) = -160^0$ אם

$P.M = -160 + 180 = +20^0$



דוגמה:



$P.M. = -210 + 180 = -30^0$

לא יציב!!

הערה:

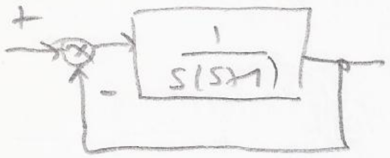
השיטה: היא גרפית מלפני זמן!

למען הדוגמה לחשב את ה P.M.

בצורה אנליטית.

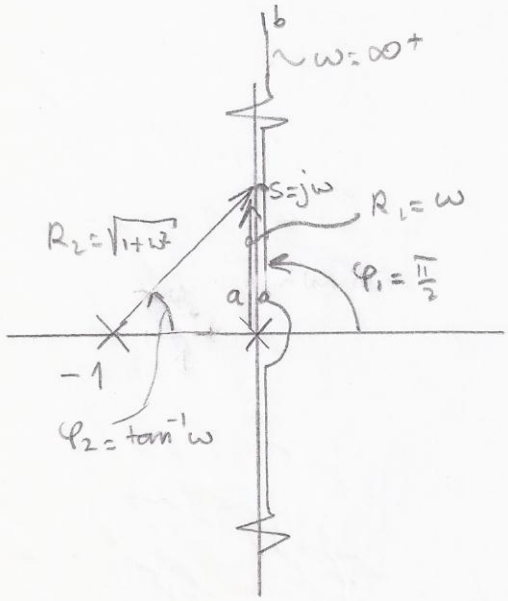
פולמ :

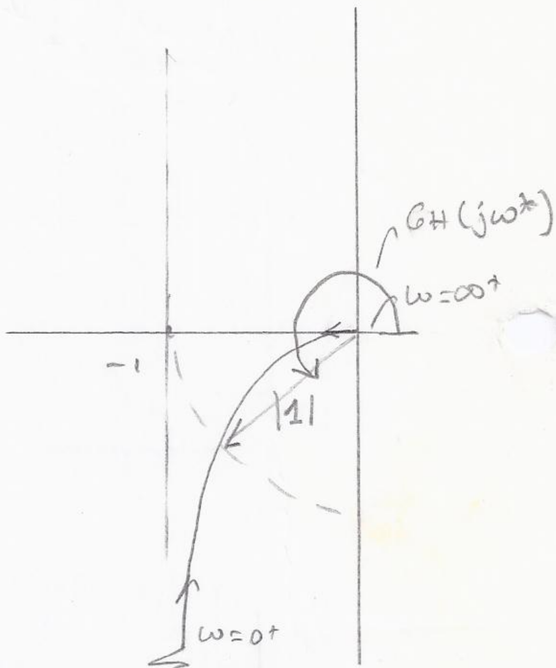
$$G(s)H(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$



מה הין

? P.M. =





$s=j\omega$ $\Leftarrow$ b ! a בין

$$GH=\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{R_1R_2}e^{-j(\varphi_1+\varphi_2)}=\frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\omega\right)}$$

$$\left.\begin{aligned} GH(j0^+)&=\infty\, e^{-90^\circ j}\rightarrow \infty\angle{-90^\circ}\\ GH(j\infty^+)&=0\, e^{-180^\circ j}\rightarrow \infty\angle{-180^\circ}\end{aligned}\right\}$$

$$\omega^*\ ?\ \longrightarrow\ \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}=1\ \rightarrow\ \omega\sqrt{1+\omega^2}=1$$

$$\omega^2(1+\omega^2)=1$$

$$\omega^4+\omega^2-1=0$$

$$\left.\begin{aligned}\omega^{2*}_{1,2}&=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{5}=0.618\\ \omega^*&=0.786\end{aligned}\right\}\rightarrow$$

$$\underline{\angle GH(j\omega^*)}=-(90^\circ+\tan^{-1}0.786)$$

$$=-(90^\circ+38.2^\circ)=-128.2$$

$$P.M.=-128.2^\circ-180^\circ=-308.2^\circ=51.8^\circ$$

ודיק !!

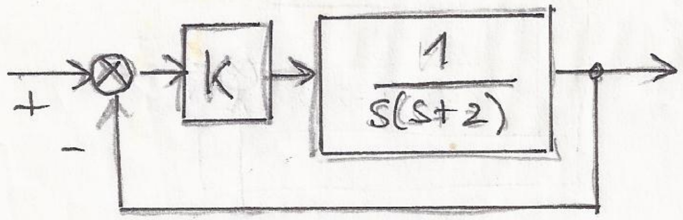
(Evans) Root Locus

תאור גרפי של הקטבים של המערכת בחוג סגור

במישור $\boxed{s}$, כפונקציה של הגבר המערכת K.

הבעיה ברוב המקרים איך לבחור את K!

דוגמה:

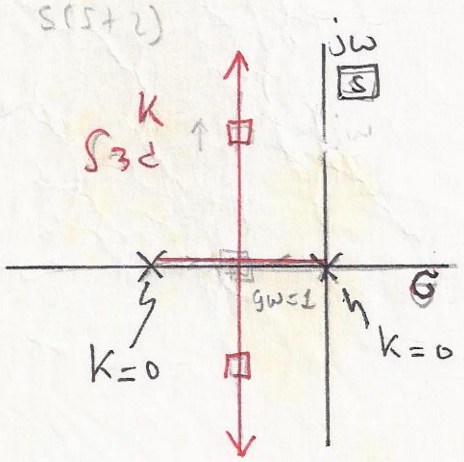


$$G|_{c.l} = \bar{G} = \frac{G}{1+GH}$$

קטבים בחוג סגור מתקבלים ע"י: $1+GH=0 \Leftarrow$

$$\frac{K}{s(s+2)} + 1 = 0 \rightarrow s^2 + \underbrace{2s}_{2\zeta\omega_0} + \underbrace{K}_{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow$$

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$$



עבור $0<K<1$ על הציר הממשי

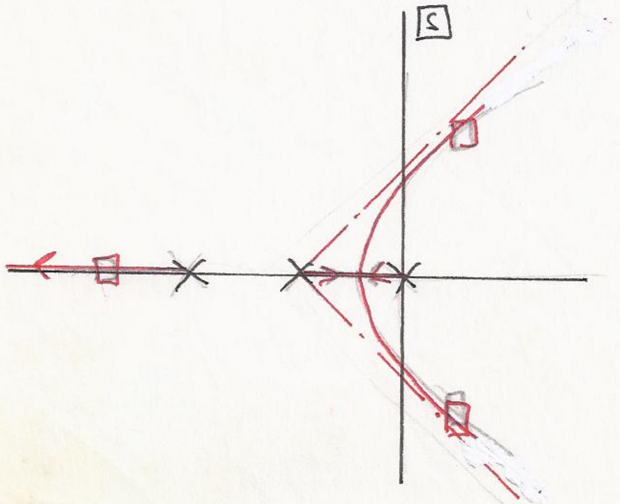
עבור $K \geq 1$ מרוכבים

יתרונות השיטה:

1. נותן מידע כמותי ואיכותי (אינטואיטיבי)

2. לאנליזה ותכנון של מערכות בקרה מסובכות

לדוגמה:



R.L. For $0 < K \leq +\infty$

איך נמצא את צורת הגומלה ??

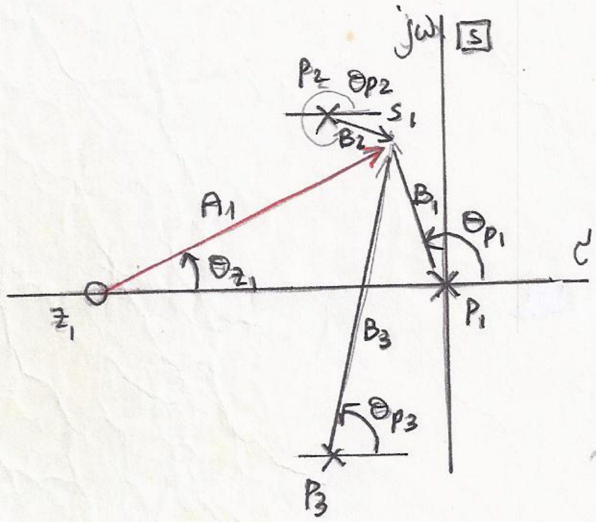
מחפשים את הפתרונים של $1+G(s)H(s)=0$

$$G(s)H(s)=-1$$

$$|G(s)H(s)|=1$$

$$\angle G(s)H(s)=(2k+1)\pi \qquad k=0,\pm 1,\pm 2,$$

לדוגמה:



$$G(s)H(s)=K\frac{(s+z_1)}{s(s+P_2)(s+P_3)}$$

עבור $s=s_1$

מה יהיה הערך של פאזה ?
בנקודה s_1

$$G(s_1)H(s_1)=K\frac{A_1}{B_1B_2B_3}e^{j(\theta_{z_1}-\theta_{P_1}-\theta_{P_2}-\theta_{P_3})}$$

אם s_1 היא נקודה על ה R.L. אזי $G(s)H(s)=-1$ ←

$$|G(s)H(s)|=1\rightarrow \boxed{K\frac{A_1}{B_1B_2B_3}=1} \Leftarrow$$ חוק הגבר

$$\angle G(s)H(s)=(2k+1)\pi \rightarrow$$

$$\boxed{[\theta_{z_1}-\theta_{P_1}-\theta_{P_2}-\theta_{P_3}]=(2k+1)\pi} \qquad k=0,\pm 1,\pm 2$$

חוק הפזה

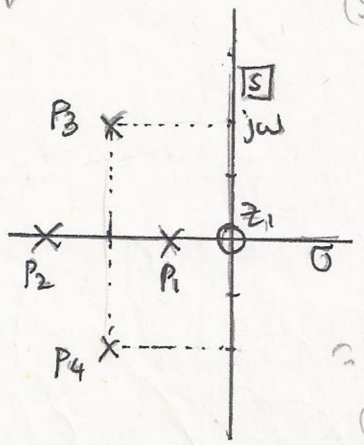
הגדרה: $\boxed{0<k<\infty}$

(K חיובי) $\boxed{0<K<\infty}$

כללים לציור ה R.L.

דוגמה:

$$G(s)H(s)=K\frac{s}{(s+1)(s+3)(s^2+4s+8)}$$

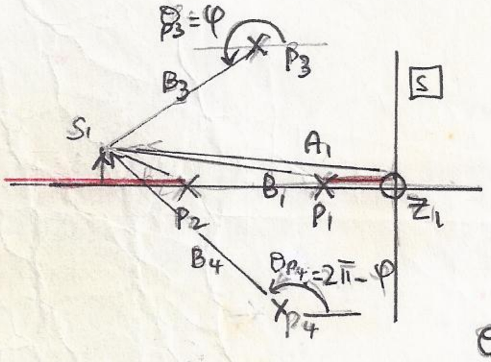


* **כלל מוהג:**
ה R.L. סימטרי לגבי הציר הממשי

① **R.L. על הציר הממשי**

ה R.L. קיים על הציר הממשי בכל נקודה אשר מימינה סכום אפסי וקטבי GH הוא בלתי זוגי

אורך הגברים:
$$\frac{A}{B_1B_2B_3B_4}=\frac{1}{K}$$
מתלכדר
של הא ! הס



הוכחה:

$$\sum\theta=(2k+1)\pi \rightarrow$$

$$\theta_{Z_1}-\theta_{P_1}-\theta_{P_2}-\theta_{P_3}-\theta_{P_4}=(2k+1)\pi$$

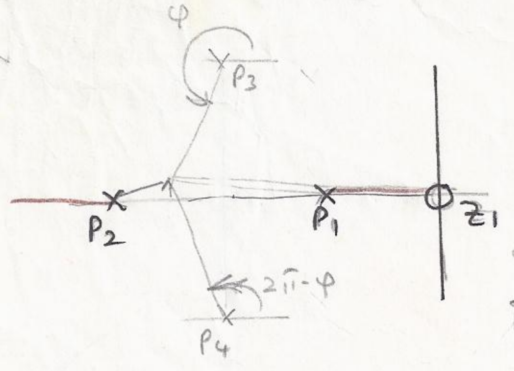
עבור נקודה S_1:

$$\pi-\pi-\pi-\varphi-(2\pi-\varphi)=-3\pi$$

R.L קיים !! $\boxed{k=-2}$

$\delta\to 0$

בגלג



$$\theta_{Z_1}-\theta_{P_1}-\theta_{P_2}-\theta_{P_3}-\theta_{P_4}=(2k+1)\pi$$

$$\pi-\pi-0-\varphi-(2\pi-\varphi)=-2\pi$$

R.L. לא קיים

עבור k שגדל מ 0 ל $+\infty$:

② ה R.L. יוצא $(k\to 0^+)$ מקטבי GH

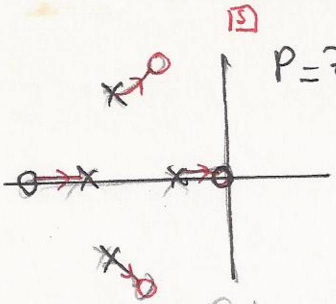
ה R.L. נגמר $(k\to+\infty)$ באפסי GH

$$1+GH=1+K\frac{(\text{אפסי GH})}{(\text{קטבי GH})}=0$$

$$=\frac{(\text{קטבים})+K(\text{אפסים})}{(\text{קטבים})}$$

קטבים $k\to 0$

אפסים $k\to\infty$



נגדיר P מספר קטבים

Z " אפסים

* אם $P=Z$ ה-R.L. "סגור"

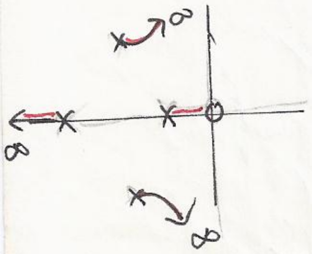
* אם $P>Z$ $M=P-Z$ ענפים של ה-R.L

הולכים ל-∞! לאורך האסימפטוטות הבאות:

(3) זווית האסימפטוטות

$$\boxed{\alpha_k=\frac{(1+2k)\pi}{P-Z}}$$

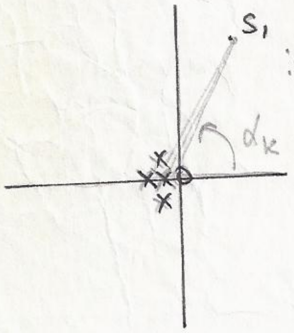
$K=0,\pm1,\pm2$



דוגמה שלנו:

$$\alpha_k=\frac{(1+2k)\pi}{4-1}=\frac{(1+2k)\pi}{3}$$

$60^\circ, 180^\circ, 300^\circ, 420^\circ$



הוכחה: עבור נקודה s_1 רחוקה:

$$(Z\alpha_k-P\alpha_k)=(1+2k)\pi$$

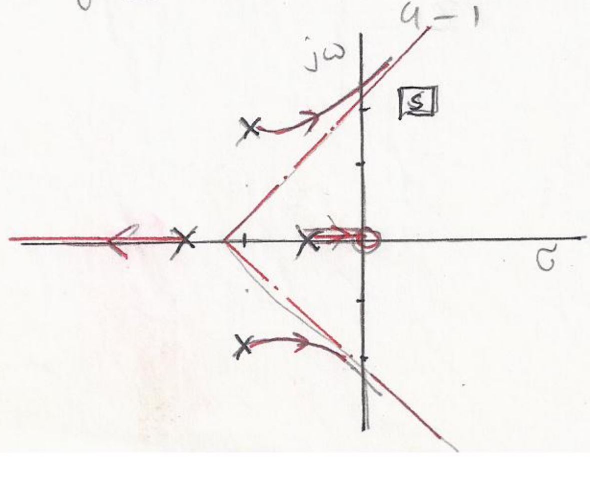
$$\alpha_k=\frac{(1+2k)\pi}{Z-P}$$

(4) מרכז הכובד של האסימפטוטות:

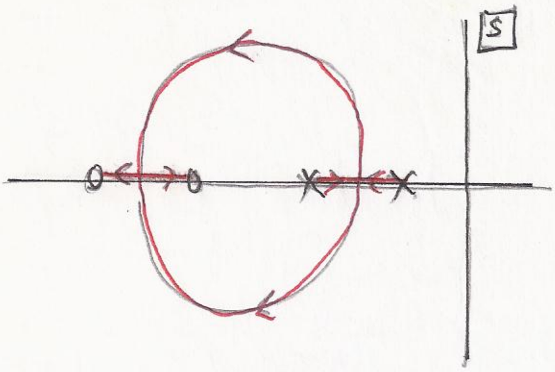
* על הציר הממשי לפי

$$C.G=\frac{\sum \text{ערכי הקטבים}-\sum \text{ערכי האפסים}}{P-Z}$$

$$C.G=\frac{\sum(-1-3-2+2j-2-2j)-\sum 0}{4-1}=-\frac{8}{3}=-2\tfrac{1}{3}$$



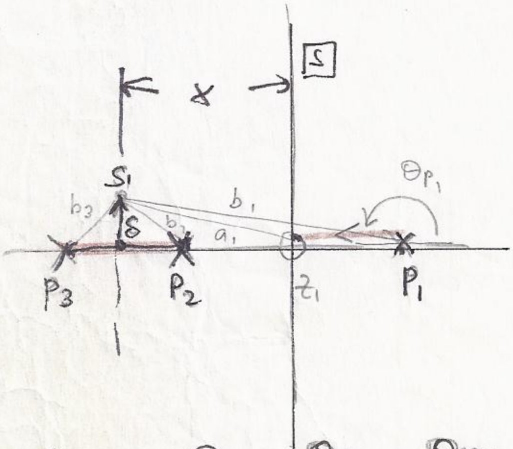
5 התפצלות על הציר הממשי! (Break away Points)



הסבר למה צריכים
להיות נקודות כאלו.

5א) קטבים ואפסים רק על הציר
הממשי

$$GH = k\frac{s}{(s+1)(s+2)(s-1)}$$



לפי תנאי הפזה:

$$\theta_{z_1} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} = (1+2k)\pi$$

עבור $\delta \ll$

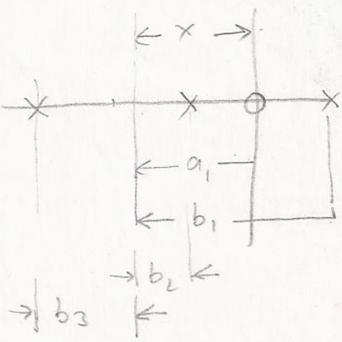
$$\left(\cancel{\pi} - \frac{\delta}{a_1}\right) - \left(\cancel{\pi} - \frac{\delta}{b_1}\right) - \left(\cancel{\pi} - \frac{\delta}{b_2}\right) - \frac{\delta}{b_3} = -\cancel{\pi}$$

$$\underbrace{-\frac{\delta}{a_1} + \frac{\delta}{b_1} + \frac{\delta}{b_2}}_{\text{ימין מ } s_1} \underbrace{-\frac{\delta}{b_3}}_{\text{משמאל מ } s_1} = 0$$

$$\underbrace{\left[\Sigma\left(\frac{1}{b}\right) - \Sigma\left(\frac{1}{a}\right)\right]}_{\text{ימין מ } s_1} - \underbrace{\left[\Sigma\left(\frac{1}{b}\right) - \Sigma\left(\frac{1}{a}\right)\right]}_{\text{משמאל מ } s_1} = 0$$

$$\left[-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right] - \frac{1}{b_3} = 0$$

$$\left\{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right\} - \frac{1}{2-x} \rightarrow$$



$$x^3 - x^2 - 1 = 0$$

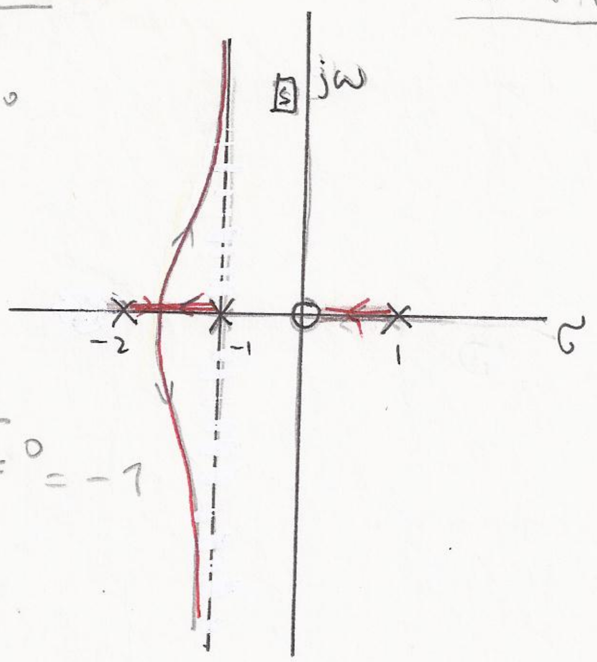
$$x_1 = 1.465$$

$$x_{2,3} = -0.23 \pm 0.8j$$

$$\alpha_k = \frac{(1+2k)\pi}{3-1}$$

אסימפטוטות

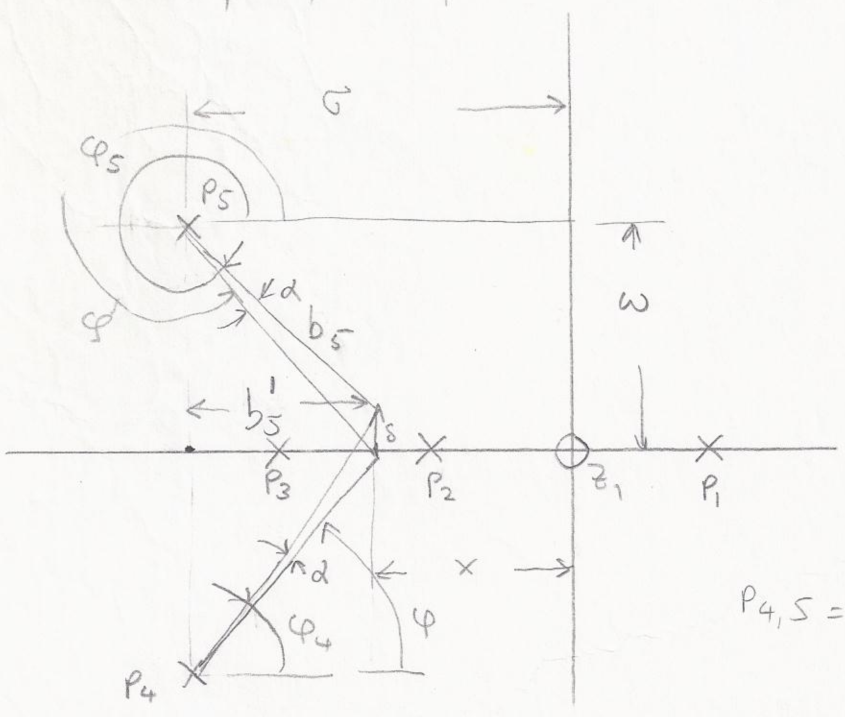
$90^\circ, 270^\circ$



המרכז:

$$c.g = \frac{\Sigma(1-1-2) - \Sigma 0}{2} = -1$$

2ב קטבים (או אפסים) קומפלקסיים (למשל) P_4, P_5



$$P_{4,5} = -\sigma \pm j\omega$$

$$\varphi_4 + \varphi_5 = \varphi + \alpha - \varphi + \alpha = 2\alpha$$

תוספת לחשבון הכיוון: 2α

$$2\alpha = 2\,\frac{\delta}{b_5}\cdot\cos\varphi \qquad \cos\varphi = \frac{b_5'}{b_5}$$

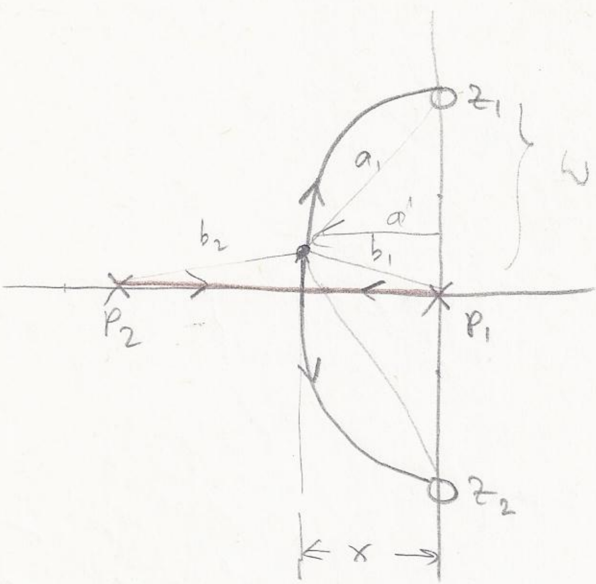
$$2\alpha = 2\,\frac{\delta}{b_5}\,\frac{b_5'}{b_5} = 2\,\delta\cdot\frac{b_5'}{b_5^2} = 2\delta\,\frac{b_5'}{b_5'^2+\omega^2}$$

$$\left[\Sigma\left(\frac{1}{b}\right) + \Sigma\left(\frac{2b'}{b'^2+\omega^2}\right) - \Sigma\left(\frac{1}{a}\right) - \Sigma\left(\frac{2a'}{a'^2+\omega^2}\right)\right]_{\substack{\text{במונה:}\\ S.N}} - \Big[\qquad\Big]$$

במכנה:

דוגמא:

$$GH = \frac{s^2+4}{s(s+2.67)}$$



$$\left[\sum\left(\frac{1}{b_2}\right)\right] - \left[\sum\left(\frac{1}{b_1}\right) - \sum\left(2\frac{a'_1}{a_1'^2+\omega^2}\right)\right] = 0$$

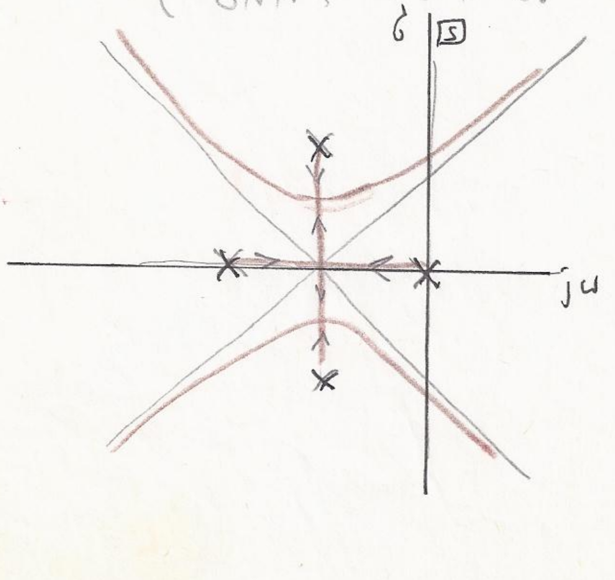
שמאל: ימין:

$$\frac{1}{2.67-x} - \left\{\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+2^2}\right\} = 0$$

$$\boxed{x=1}$$

נקודות התפצלות (Saddle Points ds
לא בדיוק הממשי)

Cannon P. 669



$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{G(s)H(s)}\right] = 0$$

$$GH(s) = \frac{s^2+4}{s(s+2.67)}$$

דוגמה הקודמת:

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{G(s)H(s)}\right] = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+2.67s}{s^2+4}\right] = 0$$

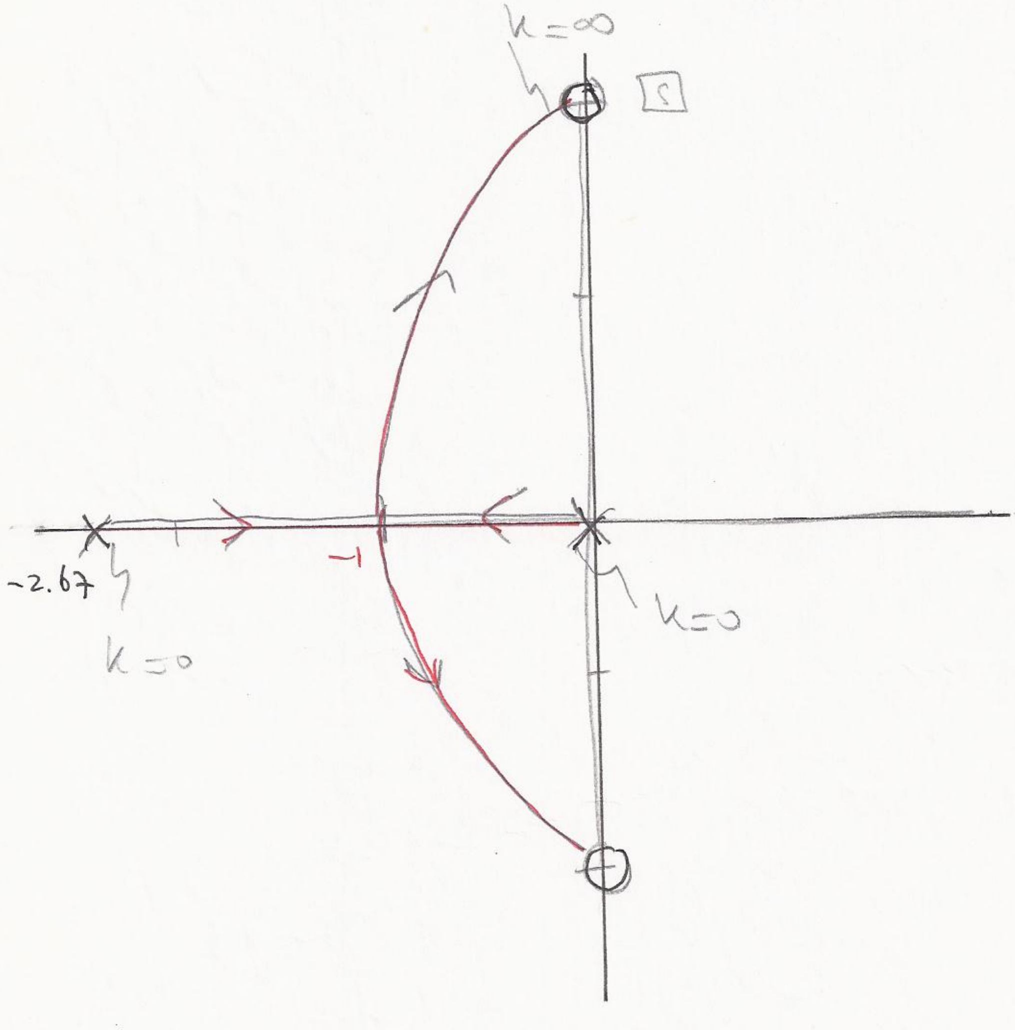
$$(s^2+4)(2s+2.67) - 2s(s^2+2.67s) = 0$$

נראה האם $s=-1$ מאפס

את המשוואה:

$$(1+4)(-2+2.67) + 2(1-2.67)$$

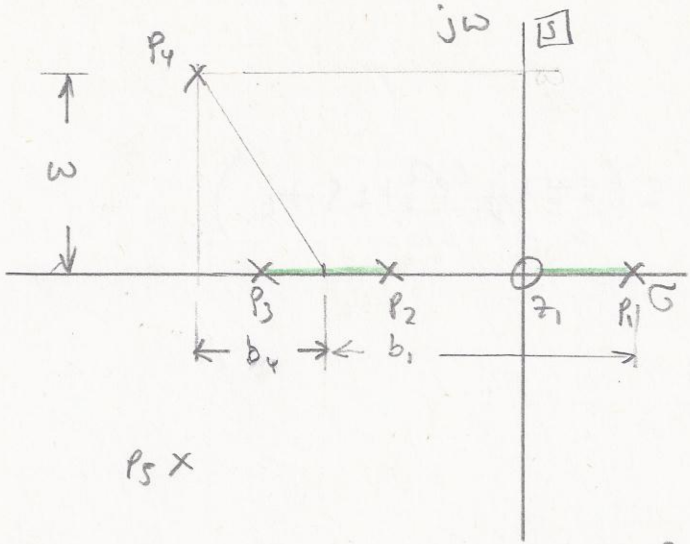
$$5\cdot(0.67) + 2(-1.67) = 3.35 - 3.35 = \underline{\underline{0}}$$



22/12/80

הצ

הצלבות עם ציר הממשי (קטבים ואפסים ממשיים וקומפלקסיים)

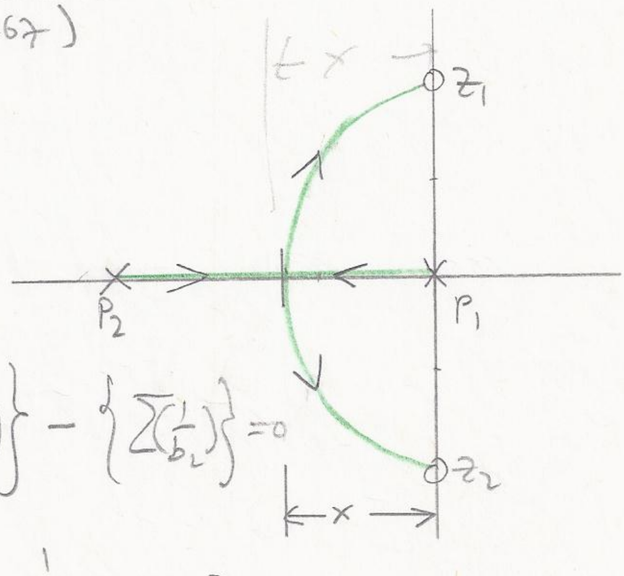


$$\underbrace{\left\{\sum\left(\frac{1}{b}\right)+\sum\left(\frac{2b}{b^2+\omega^2}\right)-\sum\left(\frac{1}{a}\right)-\sum\left(\frac{2a}{a^2+\omega^2}\right)\right\}}_{\text{מימין}}-\underbrace{\left\{\quad\right\}}_{\text{משמאל}}=0$$

קוטבים ממשיים — קטבים קומפלקסיים — אפסים ממשיים — אפסים קומפלקסיים

דוגמה:

$$GH=\frac{s^2+4}{s(s+2.67)}$$



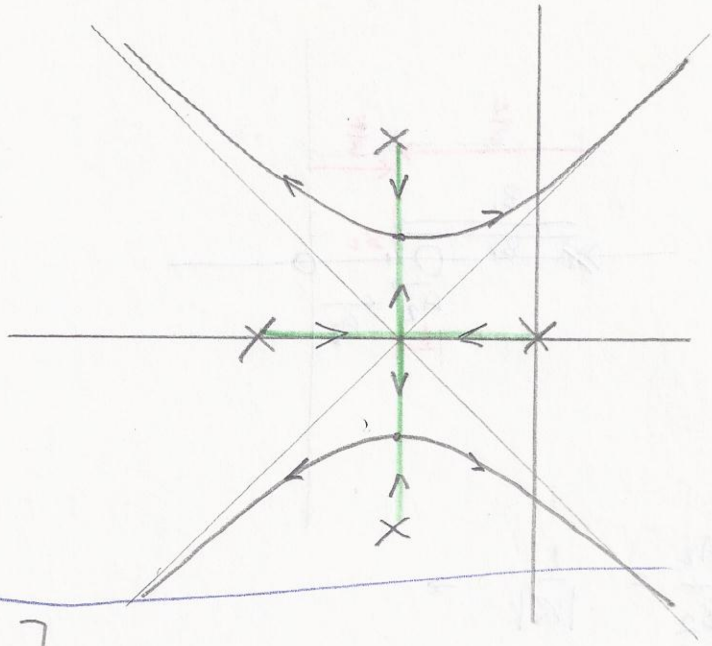
$$\left\{\sum\left(\frac{1}{b_1}\right)-\sum\left(\frac{2a_1}{a_1^2+\omega^2}\right)\right\}-\left\{\sum\left(\frac{1}{b_2}\right)\right\}=0$$

$$\left\{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+\omega^2}\right\}-\frac{1}{2.67-x}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1}$$

5ב נקודות הצלבות לא על הציר הממשי

דוגמה Cannon p. 669



$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{G(s)H(s)}\right]=0 \rightarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+2.67s}{s^2+4}\right)=0 \longrightarrow$$

<u>דוגמה פלוני''</u>

$$(s^2+4)(2s+2.67)-2s(s^2+2.67s)=0$$

נבדוק אם $\boxed{s=-1}$ מקיים את המשוואה:

$$(1+4)(-2+2.67)+2(1-2.67)=$$

$$5(0.67)+2(-1.67)=3.35-3.35=\underline{\underline{0}}$$