

— 1 —

13) $\rightarrow$ $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$

$$\dot{x} = f(x, t)$$

[illegible]

פירמע, 3'1'122 און פארשטייט זיך פארשטייט זיך —

$$\underline{x}_0 = \underline{x}(t_0) : \text{initial condition}$$

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi}(t; \underline{x}_0, t_0)$$

1. 2000 11 11 : 11

$\int_{\partial N} \langle \nabla f, \nu \rangle dV = \int_N \Delta f dV$

$$\underline{f}(\underline{x}_e, t) = \underline{0} \quad \forall t$$

828 - N888 - 51/101 - 1/2/80 - 2/1/80 - 2/1/80 - 2/1/80

$$f(x, t) = A x$$

1.1.1.1 1.1.1.1 A plc 3.1.1 N"e' P3N CI -

1. Sidyo A p/c n"e 173N ∞ 01 -

נח עיבד את אלהים יצחק ויהודה ואלה שמות בני נח

אסימטות

מקב"ל x_e נקרא אסימטות כל x_0

① אזור משיכה

② כל גודל ϵ מסוים קיים δ כך ש-

$$\|\phi(t; x_0, t) - x_e\| < \epsilon \quad \text{אם } x_0 \in B_\delta(x_e) \quad t \geq 0$$

(המשפט)

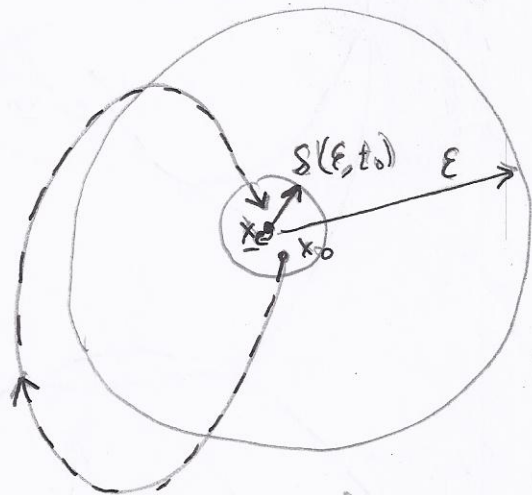
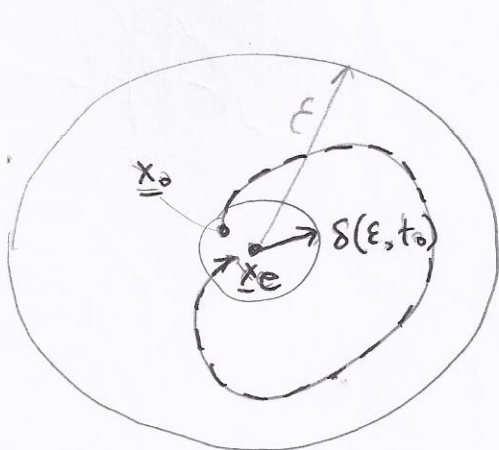
Domain of attraction $\triangleq$ מכל x_0 $t \rightarrow \infty$

אסימטות גלובלית

כל x_0 אסימטות x_e נקרא אסימטות גלובלית

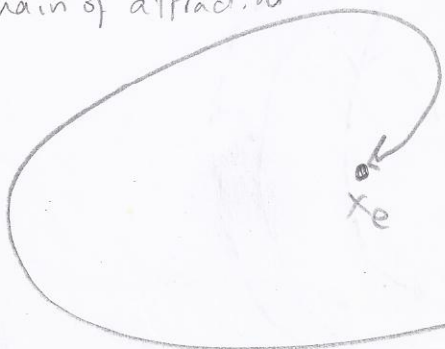
ג x_0 אסימטות x_e אסימטות גלובלית

"Asymptotically Stable in the Large"
or Globally stable



אסימטות x_e אסימטות גלובלית
within domain of attraction

אסימטות x_e

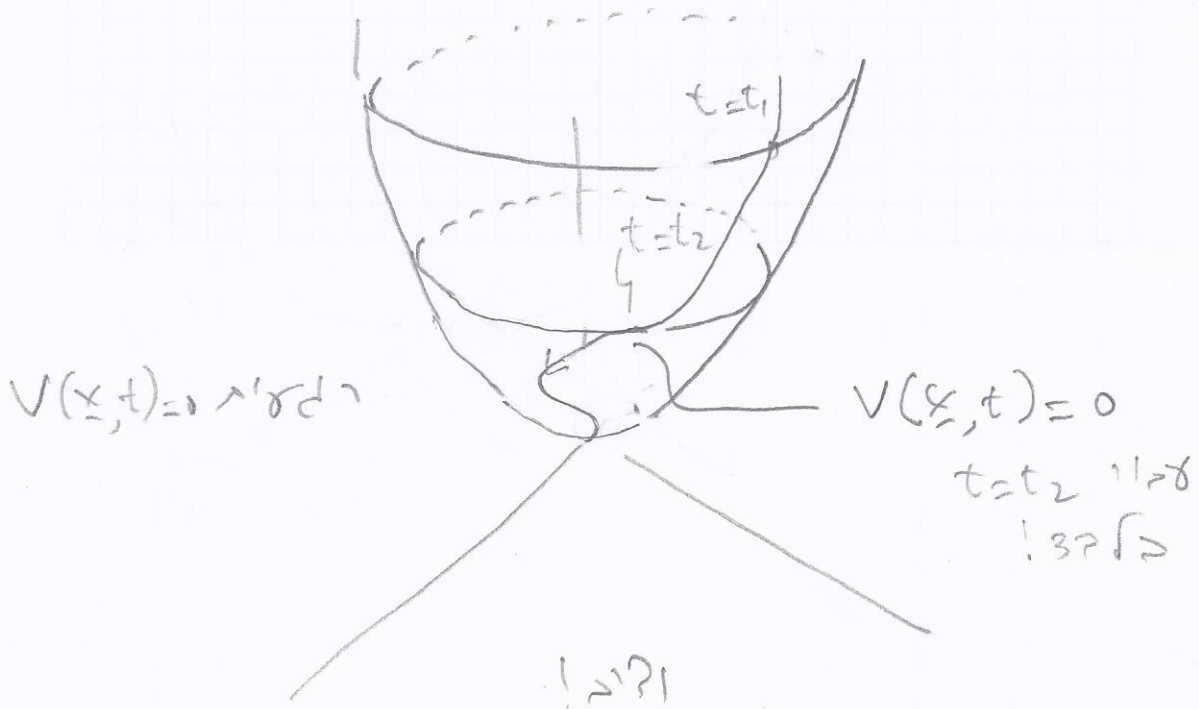
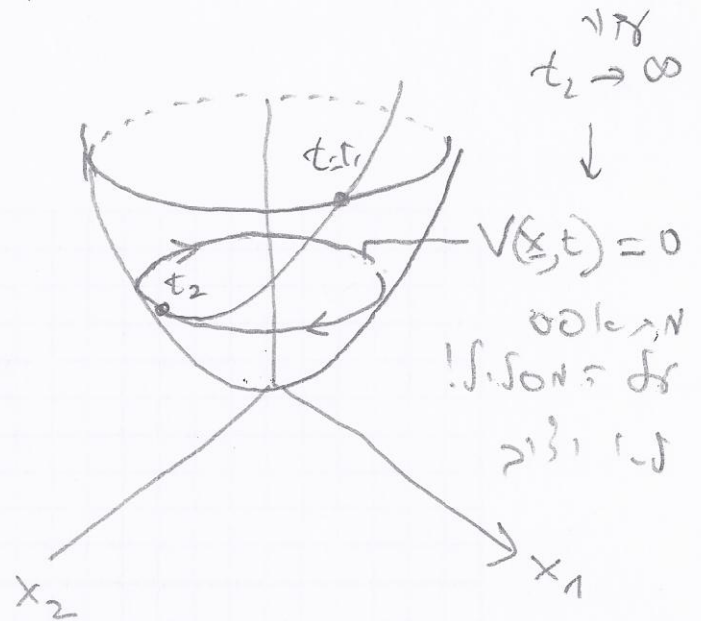
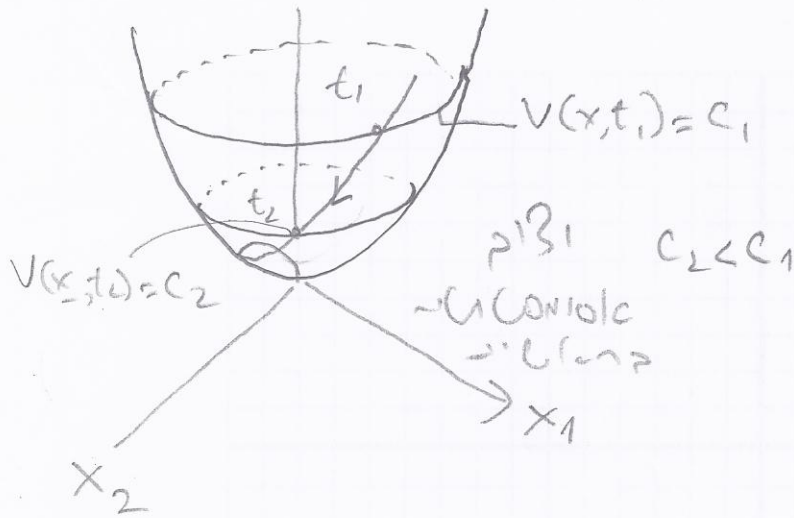


$x_0 \leftarrow$ אסימטות x_e

אסימטות x_e

אסימטות גלובלית

$$V(\underline{x}, t) < 0$$



$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -k \cdot x_1 - a x_2$$

אם $\gamma > 0$
אז $\gamma > 0$

$$V(x) = \frac{1}{2} p_1 x_1^2 + \frac{1}{2} p_2 x_2^2 \quad \text{אם } \gamma > 0$$

$$p_1 > 0$$

$$p_2 > 0$$

אם $\gamma > 0$ אז $\gamma > 0$

$$\dot{V}(x) = - \underline{x}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(p_1 - p_2 k)}{2} \\ -\frac{(p_1 - p_2 k)}{2} & a p_2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$\triangleq N$

$$ND \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \text{אם } \gamma > 0$$

$\Leftrightarrow$ אם N אז $\gamma > 0$

$$(1) \quad a p_2 > 0 \Rightarrow \begin{matrix} a > 0 \\ p_2 > 0 \end{matrix}$$

$$(2) \quad -\left(\frac{p_1 - p_2 k}{2}\right)^2 > 0 \Rightarrow \text{אם } \gamma > 0$$

$$p_1 = p_2 \cdot k$$

אם $\gamma > 0$ אז $\gamma > 0$

$$\begin{matrix} p_1 > 0 \\ p_2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{k > 0}$$

אם $V(x)$ היא פונקציה של x ו- N היא תחום סגור סביב $x=0$

אז $\dot{V}(x) \leq 0$ לכל $x \in N$

$$p_1 - p_2 k = 0$$

$$\dot{V}(x) = -x^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ap_2 \end{bmatrix} x = -ap_2 x_2^2 \leq 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - ax_2 \end{cases}$$

אם $x_2 = 0$ אז $\dot{V}(x) = 0$

אם $\dot{x}_2 = 0$ אז $-kx_1 - ax_2 = 0$

$$-kx_1 - ax_2 = 0$$

אם $x_1 = 0$ אז $x_2 = 0$ ו- $x=0$ היא הנקודה היחידה שבה $\dot{V}(x) = 0$

$$V(x) \rightarrow \infty \iff \|x\| \rightarrow \infty$$

לכן $x=0$ היא נקודת אי-יציבות.

(Definiteness)

אִי־בִּינָה לֵב אִי־בִּינָה

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n \in V(\underline{x})$ אִי־בִּינָה לֵב אִי־בִּינָה
 (PD) (Positive Definite) "אִי־בִּינָה לֵב אִי־בִּינָה" אִי־בִּינָה לֵב אִי־בִּינָה

$$\left. \begin{array}{l} V(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0} \\ V(\underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{0} \end{array} \right\}$$

plc

(אִי־בִּינָה לֵב אִי־בִּינָה) Positive Semidefinite

PSD

$$V(\underline{x}) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0}$$

$$V(\underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$$

PD $\rightarrow -V(\underline{x})$ plc ND

(אִי־בִּינָה לֵב אִי־בִּינָה) INDEFINITE

לֵב אִי־בִּינָה, ND, PSD, P.D. לֵב אִי־בִּינָה, plc

אִי־בִּינָה לֵב אִי־בִּינָה

פֿ"לֵב אִי־בִּינָה + פֿ"לֵב אִי־בִּינָה $V(\underline{x})$ plc

בדיקת סימיות

$$V(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 \quad \text{PD}$$

$$V(\underline{x}) = (x_1 + x_2)^2 \quad \text{PSD}$$

$$V(\underline{x}) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2 \quad \text{ND}$$

כל הרכיבים של $V(\underline{x})$ הם שליליים, ולכן $V(\underline{x}) < 0$ לכל $\underline{x} \neq 0$

$$V(\underline{x}) = x_1 x_2 + x_2^2 \quad \text{IND}$$

$$V(\underline{x}) = x_1^2 + \frac{2x_2^2}{1+x_2^2} \quad \text{PD}$$

(Quadratic Form) הצגת פורמט

הצגת פורמט של $V(\underline{x})$ היא $V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x}$ כאשר $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x}$$

כאשר P היא מטריצה סימטרית

$$V(\underline{x}) = [x_1, x_2, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & & \\ & & \ddots & \\ p_{1n} & & & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

מערכת דינאמית (מערכת)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$$

$$f(0, t) = 0$$

המערכת וליבה ליניארית מסוג
העליון אם קיימת פונקציה סקלרית $V(\underline{x}, t)$
(פונקציה סקלרית) המעניינת:

$$V(\underline{x}, t) \text{ הליבה והעליון מסוג סקלרית} \quad (1)$$

מסוג סקלרית הליבה מסוג סקלרית

$$\underline{x} \neq 0 \quad V(\underline{x}, t) > 0, \text{ PD} \quad V(0, t) = 0 \quad (2)$$

$$(ND) \quad \frac{d}{dt} V(\underline{x}, t) < 0 \quad (3)$$

$$\text{אם קראו את המערכת} \quad (4)$$

$$\|\underline{x}\| \rightarrow \infty \quad V(\underline{x}, t) \rightarrow \infty$$

אם הליבה ליניארית

העליון: אם $V(\underline{x}) > 0$ $V(\underline{x}) = c$ היותו מערכת

סוג קטנה מערכת ה מערכת

$$\dot{V}(\underline{x}) < 0 \quad \text{אם} \quad V(\underline{x}) \text{ ואינה עם המערכת; אכן} \quad V(\underline{x})$$

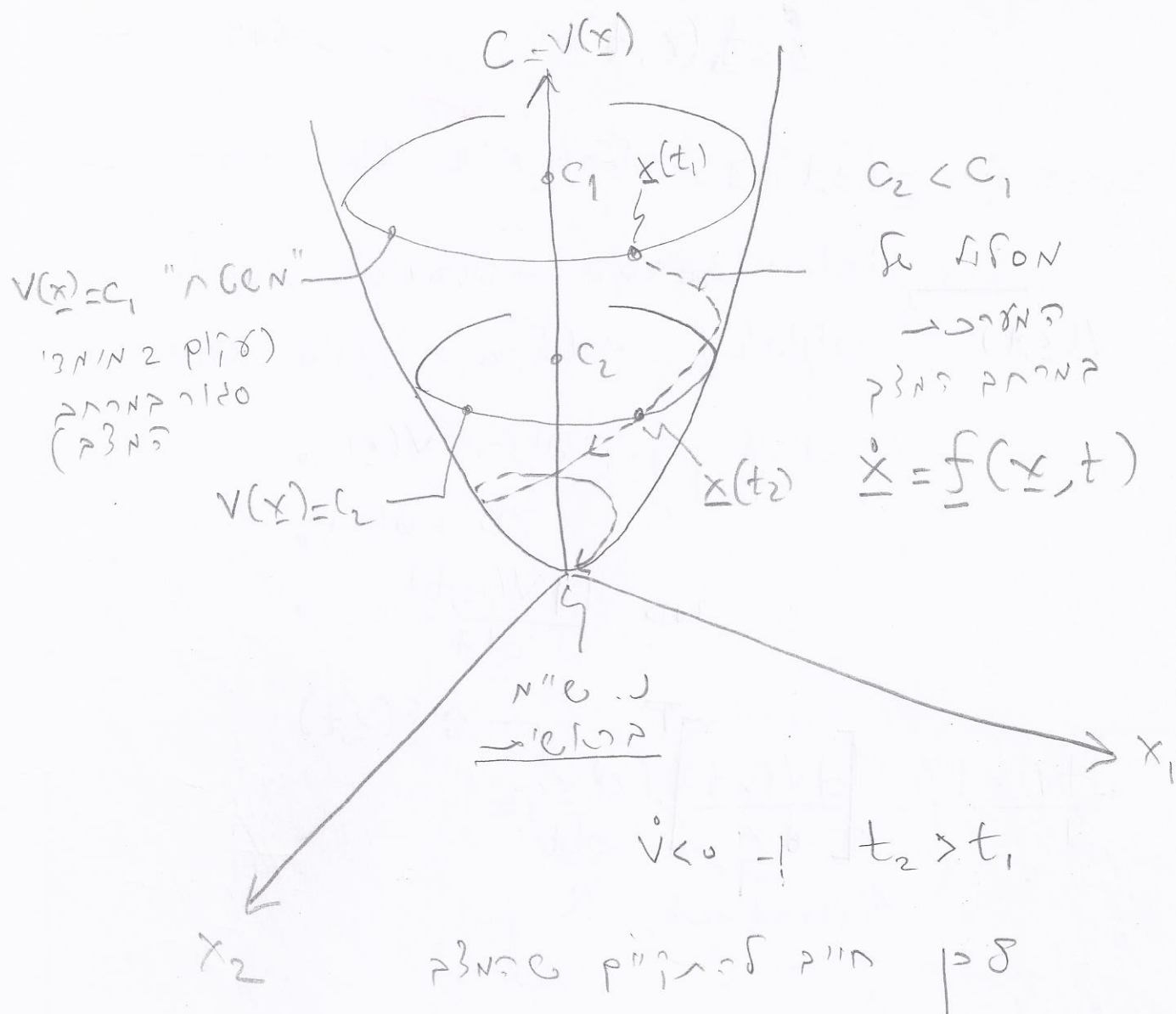
המערכת קטנה ואינה מערכת מערכת ואינה

מערכת $\underline{x}$ (המערכת) $V(\underline{x}) = c$ אולי לא מערכת מערכת

ואינה $\Leftarrow$ שאם בסוג סקלרית!

(n=2)

: and all



$t = t_1$ פאזה $V(x) = C_1$ אנרגיה x

$t = t_2$ פאזה $V(x) = C_2$ אנרגיה δ

t פאזה $C_1 \rightarrow C_2$ פאזה C פאזה

$C \rightarrow 0$ $t \rightarrow \infty$ פאזה פאזה $\Leftarrow$ פאזה

$x \rightarrow 0 \rightarrow x_0$

(פאזה אנרגיה)

- 7 -

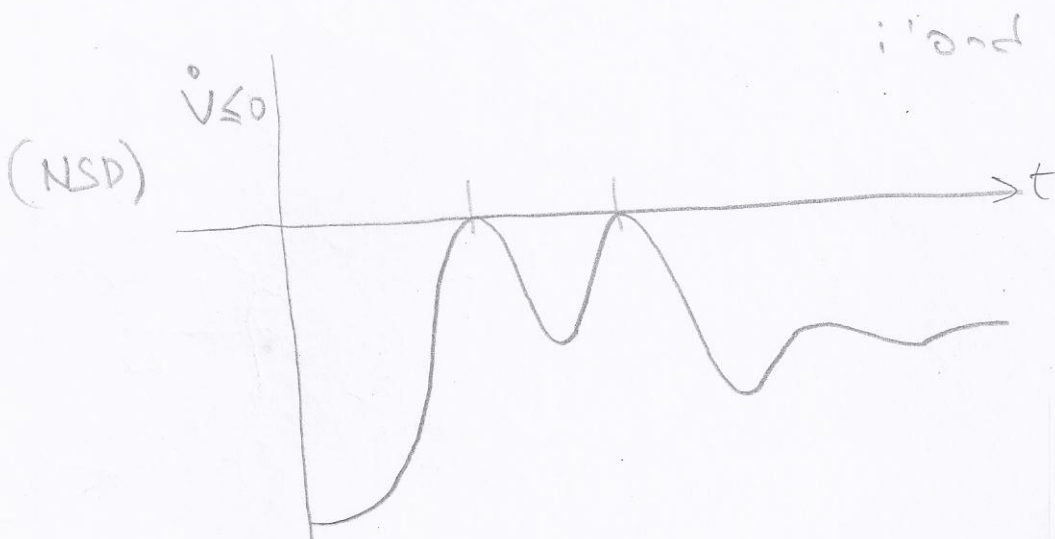
for ~~NSD~~ $\frac{dV}{dt} < 0$ e $\dot{V} < 0$

: $\dot{V} < 0$ e $\dot{V} < 0$ μ ρ α $\ln$

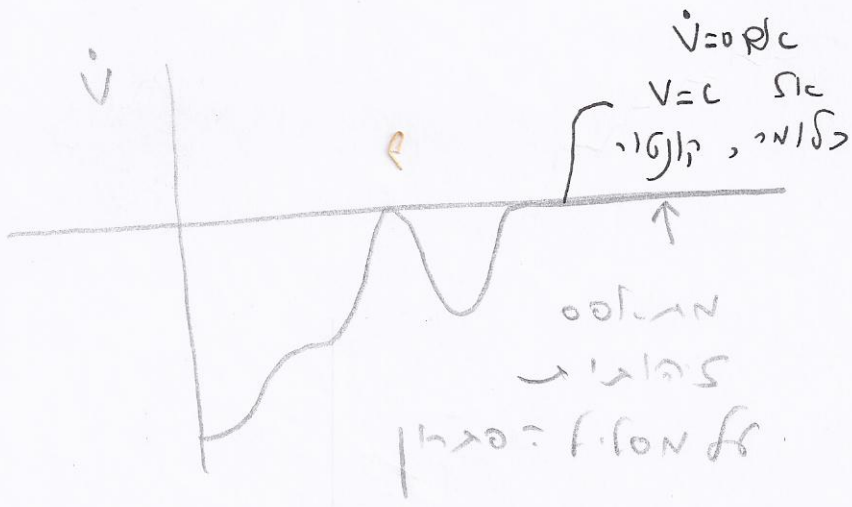
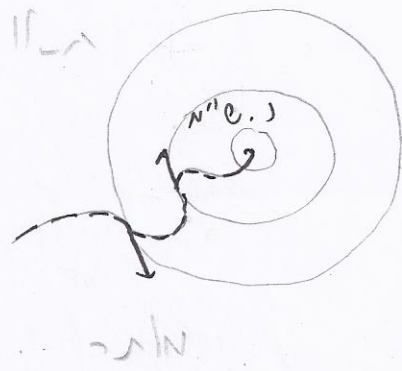
NSD $\frac{dV}{dt} \leq 0$ -

for Lyapunov $\dot{V}(x, t)$

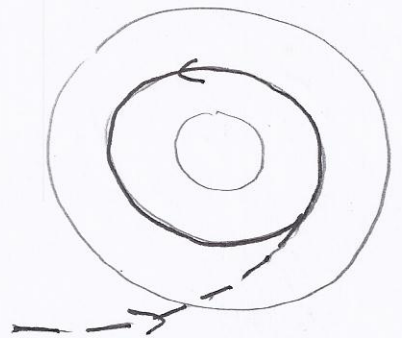
$\dot{x} = f(x, t)$ e $\dot{V}(x, t) < 0$ e $\dot{V}(x, t) < 0$



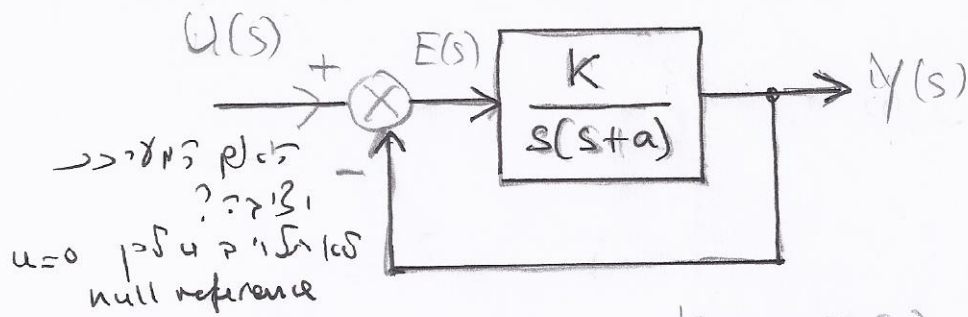
Lyapunov



Lyapunov



Lyapunov



② $\dot{V}(x) \leq 0$ (NSP)
 $\boxed{a > 0}$

$$E(s) = U(s) - \frac{k}{s(s+a)} E(s) \Rightarrow$$

$$\left[1 + \frac{k}{s(s+a)}\right] E(s) = U(s) \Rightarrow \frac{s^2 + as + k}{s(s+a)} E(s) = U(s)$$

$$E(s) = \frac{s(s+a)}{s^2 + as + k} \cdot U(s)$$

המערכת היא סטבילית

$$\ddot{e}(t) + a\dot{e}(t) + ke(t) = 0$$

המערכת היא סטבילית

$$\begin{cases} x_1 \triangleq e \\ x_2 \triangleq \dot{e} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{x}^T P \underline{x}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_1 &> 0 \\ p_2 &> 0 \end{aligned}$$

המערכת היא סטבילית (PD) $P > 0$ $p > 0$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k \cdot x_1 - a x_2 \end{aligned} \right\}$$
$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$V(x) = \frac{1}{2} p_1 x_1^2 + \frac{1}{2} p_2 x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = P_1 x_1 \dot{x}_1 + P_2 x_2 \dot{x}_2 = P_1 x_1 x_2 + P_2 x_2 (-kx_1 - ax_2)$$

$$= p_1 x_1 x_2 - p_2 k x_1 x_2 - a p_2 x_2^2 = (p_1 - k p_2) x_1 x_2 - a p_2 x_2^2$$

$$\begin{aligned} V(\underline{x}) &= \underline{x}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{p_1 - p_2 k}{2} \\ \frac{p_1 - p_2 k}{2} & -ap_2 \end{bmatrix}}_{\triangleq -N} \underline{x} = -\underline{x}^T N \underline{x} \\ N &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(p_1 - p_2 k)}{2} \\ -\frac{(p_1 - p_2 k)}{2} & ap_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(PSD) $N \geq 0$ p/c $\dot{V}(x) \leq 0$; $\forall N \in \mathbb{S}$

$\frac{p'_{12} p'_{13} p'_{23}}{p'_{11} p'_{22} p'_{33}} = \frac{p'_{12} p'_{13} p'_{23}}{p'_{11} p'_{22} p'_{33}}$

① $a p_2 \geq 0$

$$(2) \quad -\frac{(P_1 - P_2 K)^2}{2} \geq 0$$

$$p_2 > 0, a > 0, p''_1 \rightarrow N \quad (1)$$

$$p \vee q \Rightarrow p \vee \neg p \wedge N \quad (2)$$

$$K > 0 \Leftrightarrow P_1 = K P_2$$

$$\Leftarrow P_1 - P_2 k = 0$$

- d 8 -

$$\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^T N \underline{x} = -\underline{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a p_2 \end{bmatrix} \underline{x} = -a p_2 x_2^2 \leq 0$$

$\|\underline{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\underline{x}) \rightarrow \infty$ $p \in \mathbb{N}$, PSD $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0 \quad \forall$

לפי משפט ליאפונוב $\dot{V}(\underline{x})$ שלילי, $\underline{x} \rightarrow 0$

המערכת

אנחנו רוצים:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k \cdot x_1 - a x_2 \end{aligned}$$

$\dot{x}_2 = 0$, $x_2 = 0$ $\text{כל } \dot{V}(\underline{x}) = 0$

$$\dot{x}_2 = -k \cdot x_1 - a \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

אם $\underline{x} \rightarrow 0$ אז $\dot{V}(\underline{x}) = 0$! (משפט ליאפונוב)

אם $\underline{x} \rightarrow 0$ אז $\dot{V}(\underline{x}) = 0$!

-9-

בצורת וצורת של מערכת ליניאר בעלת איבר
(סטטור)

גרמון במערכת הליניארית ההמילטון מדרג n

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$$

נניח ש A על סימטרית, כלומר יש הן מצב ש"מ
אחד דמיים. אז צריך את וצורת מצב זה בעצרת ליניארית.

נניח: $V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x}$ כאשר $P > 0$ (PD) וסימטרית
(גרמון חיובית)

$$\dot{V} = \dot{\underline{x}}^T P \underline{x} + \underline{x}^T P \dot{\underline{x}} = (A \underline{x})^T P \underline{x} + \underline{x}^T P A \underline{x}$$

$$\dot{V} = \underline{x}^T [A^T P + P A] \underline{x} = - \underline{x}^T Q \underline{x}$$

$$Q \triangleq -[A^T P + P A] \quad \text{כאשר}$$

עם $V(\underline{x})$ הוא פונקציה ליניארית

אם $Q > 0$ (PD)

משפט לינאריות עבור מערכת ליניארית

היא ש"מ הן מצב ש"מ וצבא אסימפטוטי (ללא אפס)
במערכת $\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$ אם P (אם והרקם - גרמון

דברתי + מספיק) עבור כל מתייציב. סימטרית $Q > 0$
(PD) וסימטרית:

$$A^T P + P A = -Q$$

ש"מ
סימטרית
 $P > 0$

פגמן סימטרית חיובית, וחיצונית P מדרג n

סימטרית וחיובית קובץ א-א ואלה הם באזורים של P ש $Q > 0$ וסימטרית
גרמון דברתי + מספיק $V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x}$ פונקציה ליניארית.
אם חלבים לזכר: אם בחינת קובץ של P (ודולא לא פ' סימטרית)
למחל ש מערכת וצבא, Q לא קבצים PD למחל ש מערכת וצבא!

PO
(Q > 0, Lur > 0e) : 3 5 NCl3

15/11/2023

$$x_1 = x_2$$

$$x_2 = -y_1 - y_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x}' = \underline{0}$$

N צדק e'' הן היתאסו (כדלס) $\underline{\dot{x}} = 0$ $\underline{x} = 0$
 כדלס הן היתאסו $\underline{\dot{x}} = 0$ $\underline{x} = 0$

① הארץ מדינת ישראל

(התנאי הראשון) $V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x}$ ($P \succ 0$)

$$(1/2(N+1) PD) Q = I \quad \text{for } N/2 \quad (2)$$

③ פארהאנדלונג

$P \triangleleft \text{in } G \cap I$

$$A^T P + P A = -I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2P_{12} = -1$$

$$P_{11} - P_{12} - P_{22} = 0$$

$$2P_{12} - 2P_{22} = -1$$

$$3/2 > 0 \quad \left| \begin{array}{cc} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{array} \right| > 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

④ 1957 年 10 月 1 日

→ 160000 = 2131 → 2755 ⇐ (PD) P > 0 105

$$\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{\dot{x}}^T Q \underline{x} = -x_3^2$$

$$\underline{1 \ 5 \ 1 \ 3 \ 2}$$

$$(\dot{x}_3 = 0) \iff x_3 = 0 \iff \dot{V}(\underline{x}) = 0 \text{ p/c -}$$

$$(\dot{x}_1 = 0) \iff x_1 = 0 \iff \dot{x}_3 = -Kx_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 = 0 \iff \dot{x}_1 = x_2 = 0$$

والمستقر في $\dot{V}(\underline{x}) = 0$ هو

المتجه $\underline{x} = \underline{0}$ هو المستقر

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ Q^{1/2} A \\ Q^{1/2} A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & -K & 1 \end{bmatrix} = 3 \quad \begin{array}{l} \text{والمستقر} \\ K \neq 0 \end{array}$$

$$A^T P + P A = -Q \quad \text{معادلة ليونارد} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\text{عدد} \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 6$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

-12-

LQR

(Linear Quadratic Optimal Control)

"LQR"

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

$$J(\underline{x}, \underline{u}) = \int_0^{\infty} (\underbrace{\underline{x}^T Q \underline{x}}_{\text{state cost}} + \underbrace{\underline{u}^T R \underline{u}}_{\text{control cost}}) dt$$

$$Q \geq 0$$

$$R > 0$$

→ The optimal control law is given by

$$\underline{u}(t) = -K \cdot \underline{x}$$

full state feedback

"Riccati" → The optimal gain K is determined by the Riccati equation

→ The Riccati equation is given by

Riccati

→ The Riccati equation can be solved using the Liapunov method

Lyapunov's theorem for stability

(1) $\rightarrow$ stability condition:

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$$

$\Leftarrow$ A is stable iff $\exists$ a symmetric positive definite matrix Q such that $\underline{x} = 0$ is the only solution.

$\Rightarrow$ A is stable iff $\exists$ a symmetric positive definite matrix Q .

$$J = \int_{t=0}^{\infty} \underline{x}^T Q \underline{x}$$

Q is symmetric positive definite (PSD) or positive definite (PD).

$$\underline{x}^T Q \underline{x} = - \frac{d}{dt} \left[\underline{x}^T P \underline{x} \right] \quad \text{if } \underline{x} \neq 0$$

P is symmetric positive definite (PD).

$$\begin{aligned} \underline{x}^T Q \underline{x} &= - \dot{\underline{x}}^T P \underline{x} - \underline{x}^T P \dot{\underline{x}} = - \underline{x}^T A^T P \underline{x} - \underline{x}^T P A \underline{x} \\ &= - \underline{x}^T [A^T P + P A] \underline{x} \end{aligned}$$

אם A רג'ע, Liapunov רג'ע'ס -

יש P $\sim$ PD PSD Q $\sim$ PD PSD

$\sim$ PD PSD Q $\sim$ PD PSD

$$P \quad A^T P + P A = -Q$$

P $\sim$ PD PSD Q $\sim$ PD PSD

$$J = \int_0^{\infty} \underline{x}^T Q \underline{x} dt = - \underline{x}^T P \underline{x} \Big|_0^{\infty} =$$

$$- \underline{x}(\infty)^T P \underline{x}(\infty) + \underline{x}(0)^T P \underline{x}(0)$$

(אם $\underline{x}(\infty) = 0$)

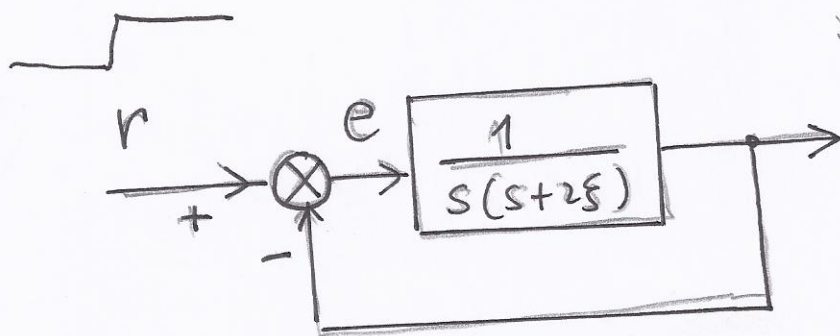
$$\Leftarrow \underline{x}(\infty) \rightarrow 0 \Leftarrow \text{אם } A \text{ רג'ע}$$

$$J = \underline{x}(0)^T P \underline{x}(0)$$

אם $\underline{x}(0) = 0$ $\Rightarrow$ $J = 0$ $\Rightarrow$ A רג'ע

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{\theta}} = 0 \Rightarrow A \text{ רג'ע}$$

μ $\sim$ PD PSD



הערכות של

(הערכות) $r(t) = u(t)$ וזה $p > \xi > 0$ לכן

הערכות של $J = \int_0^{\infty} (e^2 + \mu \dot{e}^2) dt$ (!!! $\dot{e}$! e from u)

$$e = r - \frac{1}{s(s+2\xi)} e$$

$$\left[1 + \frac{1}{s(s+2\xi)} \right] e = r$$

$$e(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{s(s+2\xi)}{s^2+2\xi s+1} \cdot \frac{1}{s} = 1$$

$$e = \frac{s(s+2\xi)}{s^2+2\xi s+1} \cdot r(s)$$

$$\ddot{e} + 2\xi \dot{e} + e = \ddot{r} + 2\xi \dot{r}$$

$$\Leftarrow \ddot{r}(0^+) = 0 \quad \dot{r}(0^+) = 0 \quad \Leftarrow r(t) = u(t)$$

$$\ddot{e} + 2\xi \dot{e} + e = 0$$

$$e(0) = 1 \quad \dot{e}(0) = 0 \quad \therefore \text{הערכות של}$$

1.7.3d)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\triangleq e \\ x_2 &\triangleq \dot{e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\xi \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}}$$

$$J = \int_{0^+}^{\infty} (e^2 + \mu \dot{e}^2) dt = \int_{0^+}^{\infty} (x_1^2 + \mu x_2^2) dt$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} dt = \int_{0^+}^{\infty} \underline{x}^T Q \underline{x}$$

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

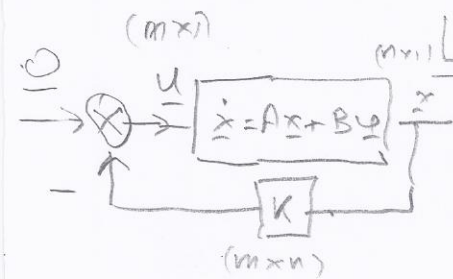
$$J = \underline{x}^T(0^+) P \underline{x}(0^+)$$

: for the value of P we have

$$A^T P + P A = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} -2p_{12} &= -1 \\ p_{11} - 2\xi p_{12} - p_{22} &= 0 \\ 2p_{12} - (1 + 2\xi p_{11} - p_{22}) &= \mu \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} \xi + \frac{1+\mu}{4\xi} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1+\mu}{4\xi} \end{bmatrix}$$



$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

$$\underline{u} = -K \cdot \underline{x} \quad \text{full state feedback}$$

$$J = \int_{t=0}^{\infty} (\underbrace{\underline{x}^T Q \underline{x}}_{\text{state}} + \underbrace{\underline{u}^T R \underline{u}}_{\text{control}}) dt$$

$$\begin{matrix} \text{PD} & Q \geq 0 \\ \text{PD} & R > 0 \end{matrix}$$

$$J \text{ is minimized by } K$$

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} = A\underline{x} - B \cdot K \cdot \underline{x} = \underbrace{[A - BK]}_{\triangleq A_{cl}} \underline{x} = A_{cl} \cdot \underline{x}$$

$$J = \int_0^{\infty} (\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u}) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} (\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{x}^T \tilde{K}^T R K \underline{x}) dt = \int_0^{\infty} \underbrace{\underline{x}^T [Q + \tilde{K}^T R K]}_{\bar{Q}} \underline{x} dt$$

pr, pl; Ind. of the state

$$A_{cl} = A - BK$$

$$\bar{Q} = Q + K^T R K$$

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} = -\bar{Q}$$

$$\underbrace{[A - BK]^T}_{A_{cl}^T} P + P \underbrace{[A - BK]}_{A_{cl}} = - \underbrace{(Q + K^T R K)}_{\bar{Q}}$$

$$J = \underline{x}(0)^T P \underline{x}(0)$$

הצגת פונקציית העלות

1. הצגת פונקציית העלות J כפונקציה של K

$$J(K) \Leftarrow J = \underline{x}(0)^T P \underline{x}(0) - \gamma P \gamma$$

$$\frac{\partial J}{\partial K} = 0$$

$$\underline{u} = -K \underline{x}$$

הצגת פונקציית העלות

$$R = S^T S$$

$R > 0$ (PD)

$$[A - BK]^T P + P[A - BK] + Q + K^T S^T S K = 0$$

$$A^T P + P A - \underbrace{K^T B^T P - P B K + (SK)^T (SK)}_{\text{רצף פשוט}} + Q = 0$$

$$\textcircled{2} PBK = PB S^{-1} (SK)$$

$$\textcircled{1} K^T B^T P = (SK)^T (S^T)^{-1} B^T P$$

$$\begin{aligned} (SK)^T (SK) - (SK)^T (S^T)^{-1} B^T P - P B S^{-1} (SK) &= \\ &= \underbrace{[SK - (S^T)^{-1} B^T P]}_a^T \underbrace{[SK - (S^T)^{-1} B^T P]}_b - \underbrace{P B S^{-1} (S^{-1})^T B^T P}_{R^{-1}} \end{aligned}$$

$$A^T P + P A + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

$$J = \underline{x}^T(0) P \underline{x}(0)$$

non-negative

$$\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} = 0 \quad \text{No sign plugging}$$

$$\leftarrow SK = (S^{-1})^T B^T P \quad : p8$$

$$K = \underbrace{S^{-1}(S^{-1})^T}_{R^{-1}} B^T P = R^{-1} B^T P$$

$$\boxed{K = R^{-1} B^T P}$$

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

(A.R.E) Algebraic Riccati Equation
Reduced-Matrix Riccati equation

is the

P ARE

$$K = R^{-1} B^T P \quad \text{P}$$

When $R=0$ (no control cost)

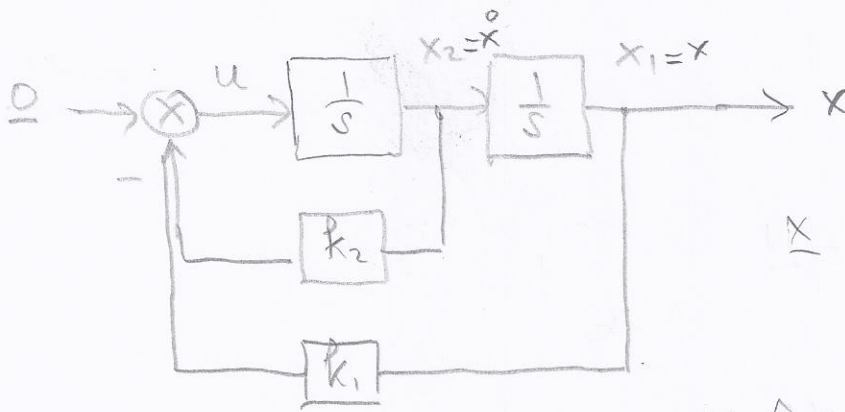
$$\underline{u} = - \underbrace{R^{-1} B^T P}_{\hat{K}} \underline{x}$$

3

is the

full state feedback

2/13



$$\underline{x} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2 \times 1 \\ 1 \times 1 \end{matrix}$$

$$\underline{u} \triangleq u = - \underbrace{[k_1 \ k_2]}_K \cdot \underline{x} = -K \cdot \underline{x}$$

$$J = \int_0^{\infty} (\underline{x}^T Q \underline{x} + u^2) dt$$

x_1 for $\int_0^{\infty}$ (2x1) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ $\mu \geq 0$ x_2 for $\int_0^{\infty}$ (1x1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \cdot u$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + B \cdot u$$

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad ; \text{A.R.E.}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_P + \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A$$

$$- \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{[1]}_{R^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_P +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}}_Q = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_0$$

$$\left. \begin{aligned} 1 - P_{12}^2 &= 0 \\ P_{11} - P_{12}P_{22} &= 0 \\ \mu + 2P_{12} - P_{22}^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} P_{12} &= \pm 1 \rightarrow \int \omega \\ P_{12} &= 1 \\ P_{11} &= P_{22} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu + 2P_{12} - P_{22}^2 &= 0 \\ P_{11} = P_{22} &= \sqrt{\mu+2} \end{aligned}$$

$\therefore P > 0$ $\therefore$ $\mu > -2$ $\therefore$ $\mu > -2$ $\therefore$ $\mu > -2$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu+2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}$$

$$K = R^{-1} B^T P$$

$$K = [1] \cdot [0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = [P_{12} \ P_{22}]$$

$$K = [1 \ \sqrt{\mu+2}]$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 1 \\ h_2 &= \sqrt{\mu+2} \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore \text{for } \mu > -2 \text{ } \underline{\underline{\mu = -1.28 \text{ rad/sec}}} \quad (1)$$

$$u = -x_1 - \sqrt{2} \cdot x_2$$

$$\therefore \mu = 0 \text{ } \underline{\underline{\mu = 0.128 \text{ rad/sec}}} \quad (2)$$

$$\Delta(s) = s^2 + \sqrt{2} \cdot s + 1$$

$$2\zeta\omega_0 = \sqrt{2} \quad \omega_0 = 1$$

$$\boxed{\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

