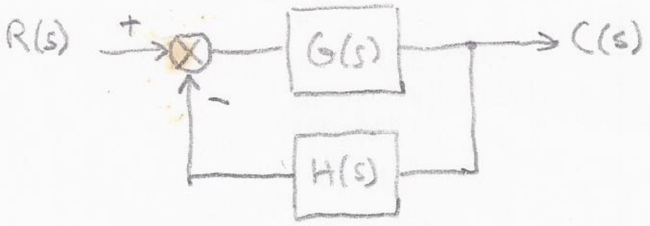
קריטריון היציבות של Nyquist

הגדרה:



מטרה: לבדוק את יציבות המערכת בחוג סגור:

$$\bar{G}_R^C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

הקטבים בחוג סגור: הקטבים של $\bar{G}_R^C$

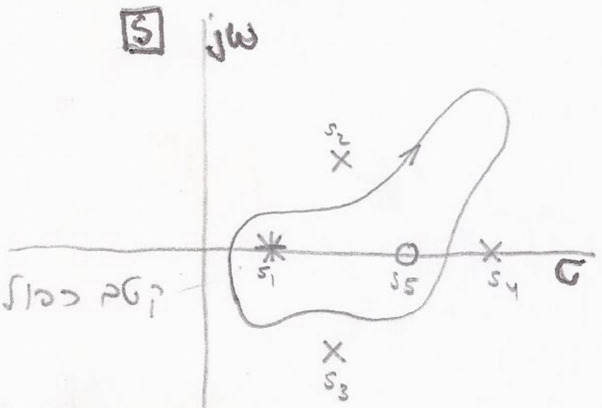
$\triangleq$ האפסים של $1+G(s)H(s)=0$

- קריטריון נייקוויסט אומר לנו אם הקטבים נמצאים במישור השמאלי או ימני של $\boxed{s}$ או על הציר jw וזאת ע"י בדיקה מסויימת של $G(s)H(s) \Leftarrow$ OLTF

נכסה לצורך הצגת הקריטריון

העתקות קונפורמיות

נתונה פונקציה $W(s)$ עם קטבים ואפסים במישור $\boxed{s}$ כמצוייר:



$$W(s) = K\frac{(s-s_5)}{(s-s_1)^2(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$$

u, jv

σ, jω

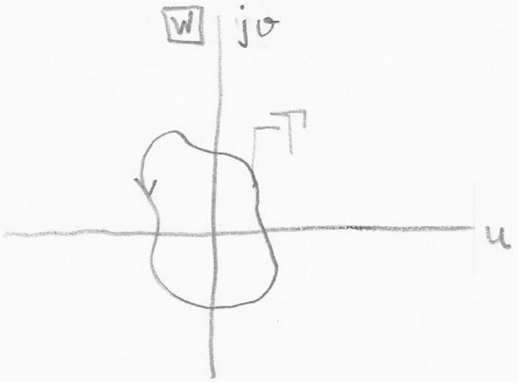
↑

— כל נקודה במישור $\boxed{s}$ קובעת נקודה במישור $\boxed{w}$ שהוא מישור הפונקציה.

— כל הנקודות במישור $\boxed{s}$ הנמצאות על קונטור C קובעות נקודות במישור $\boxed{w}$ המצטרפות גם שם לקונטור מסוים Γ (gamma) (לצייר את C!)

— אנו אומרים שהפונקציה W(s) <u>העתיקה</u> את הקונטור C ממישור $\boxed{s}$ לקונטור Γ במישור $\boxed{w}$

במקרה שלנו למשל נניח ש Γ נראה כך:

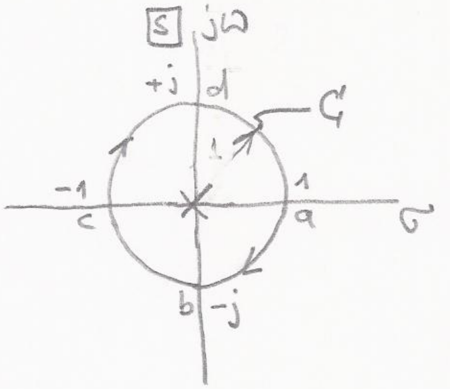


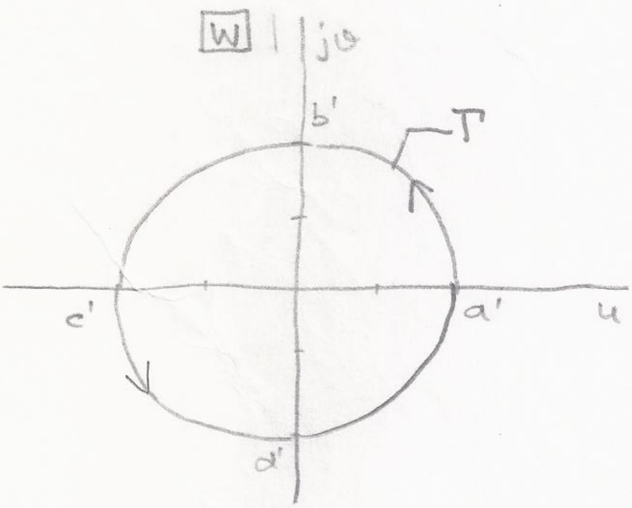
<u>שים לב!</u> יש חשיבות למגמה: אם הולכים על C עם מגמה מסויימת, W(s) קובעת לא רק את Γ אבל גם את המגמה שלו המתאימה להליכה על C

דוגמה:

נניח $W(s)=\frac{2}{s}$

נניח G הוא מעגל ב $\boxed{s}$ שמרכזו בראשית ורדיוס 1. נבחר מגמה <u>עם</u> כיוון השעון:





נקודה	$\boxed{s}$	$\boxed{W}$
a	1	2
b	$-j$	$2j$
c	-1	-2
d	$+j$	$-2j$
a	1	2

T למעשה הוא מעגל מכוון שלל G זיים:

$$s=1\cdot e^{j\phi}$$

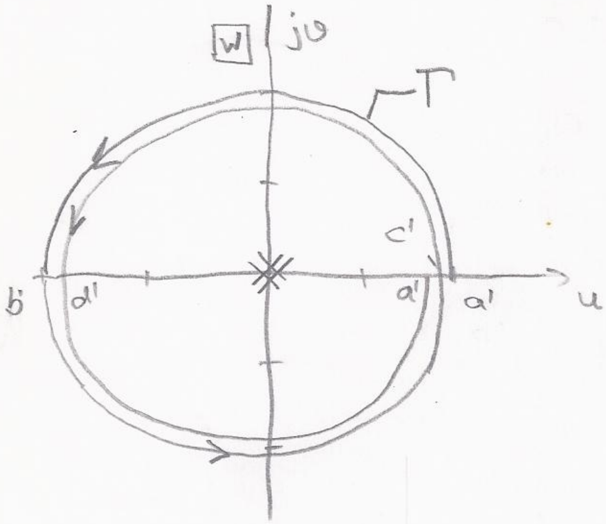
$$\therefore W(s)=\frac{2}{s}=\frac{2}{1\cdot e^{j\phi}}=2\cdot e^{-j\phi}$$

אנו רק רואים שכאשר הולכים במישור $\boxed{s}$ על G <u>עם</u> כיוון השעון אז הפאזה של הנקודות על T גדלות בכיוון ϕ-

כלומר יש פה הפוך מגמה!

דוגמה נוספת:

נניח ש C היא כמו קודם אבל $W(s)=\frac{2}{s^2}$



	C	T
	s	w
a	1	2
b	$-j$	-2
c	-1	2
d	$+j$	-2
a	1	2

שני סיבובים נגד כוון השעון!

מדוע? על C: $s=1\cdot e^{j\phi}$

על T: $W(s)=\frac{2}{s^2}=\frac{2}{e^{2j\phi}}=2e^{-2j\phi}$

עוד דוגמה:

$W(s)=2s$ ושוב C

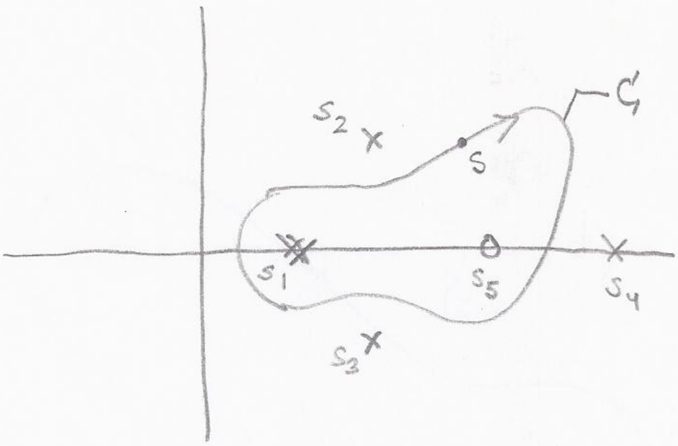
על C: $s=1\cdot e^{j\phi}$

על T: $W(s)=2s=2e^{j\phi}$

כלומר: T מתאר מעגל ברדיוס 2

כוון הליכה עם כוון השעון (כמו C)

נחזור לציור הקודם:



ברור כי:

$$W(s) = K\,\frac{(s-s_5)}{(s-s_1)^2(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$$

נתבונן בביטוי: $s - s_i$

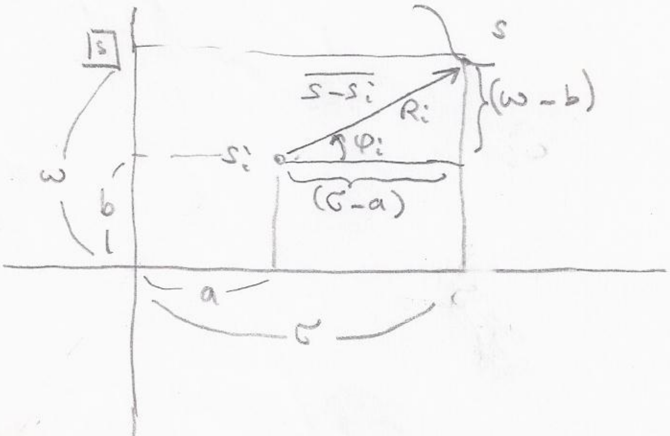
$s_i = a + jb$ (הקוטב/אפס)

$s = \sigma + j\omega$ (נקודה על C)

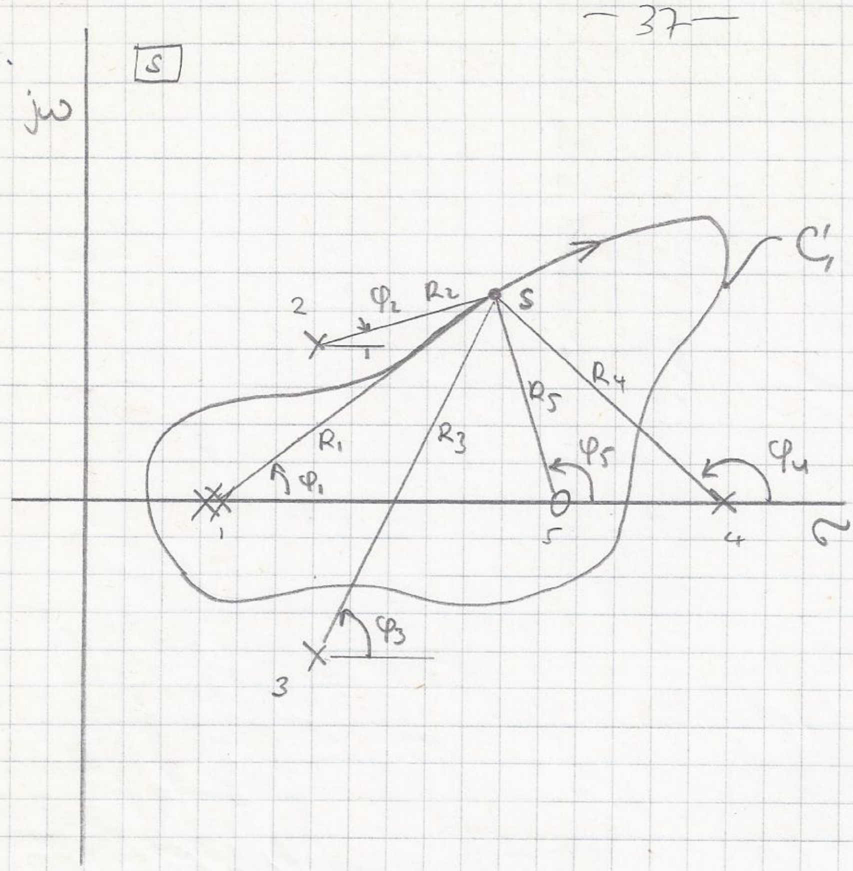
$$\overline{s-s_i} = \sigma + j\omega - a - jb = (\sigma - a) + j(\omega - b)$$

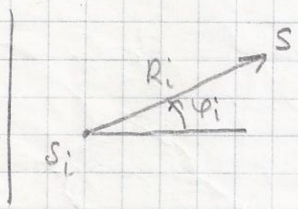
$$\overline{s-s_i} = \sqrt{(\sigma-a)^2 + (\omega-b)^2}\cdot e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\omega-b}{\sigma-a}\right)}$$

$$\overline{s-s_i} = R_i \cdot e^{j\varphi_i}$$



24/11/80





$$s-s_i=R_i\,e^{j\varphi_i}$$

$$W(s)=K\,\frac{(s-s_5)}{(s-s_1)^2(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$$

$$\Downarrow$$

$$W(s)=K\,\underbrace{\frac{R_5}{R_1^2R_2R_3R_4}}_{\Downarrow\ \rho}\;e^{j\underbrace{\left[\varphi_5-(2\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)\right]}_{\Downarrow\ \Phi}}$$

$$W(s)=\rho\,e^{j\Phi}$$

$0<\rho<\infty$ $\left\{\begin{array}{l}\rho>0 \\ \rho<\infty\end{array}\right.$

— אם C'_1 לא עבר דרך אפס $\rho>0$

" " " " " קוטב $\rho<\infty$

38 - רוצים לדעת כמה פעמים

T

את : הראשית

– φ ← בסיבוב מלא על C

φ_2, φ_3, φ_4 יחזרו ל ערכם המקורי

בלי להוסיף או להוריד מ Φ!

φ_1 , φ_5 לא:

קוטב מוקף מוריד 2π } מ Φ

אפס מוקף מוסיף 2π } ל Φ

משפט:

$\boxed{N = Z - P}$ בהליכה על C עם כיוון השעון

Z : מספר האפסים של $W(s)$ בתוך C

P : " הקטבים " "

N : מספר ההקפות בכיוון השעון של הראשית במישור $\boxed{W}$ ע"י T

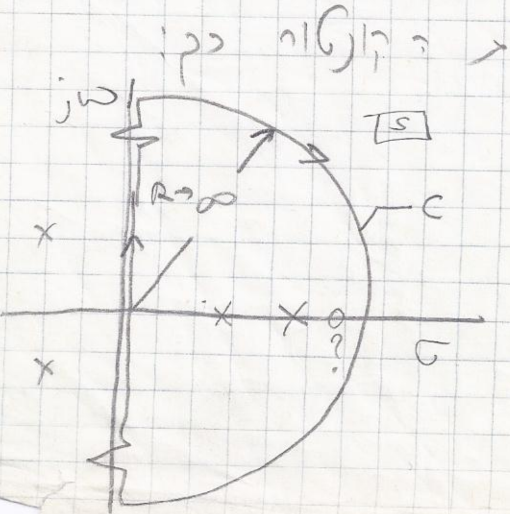
בעית היציבות שלנו:

נתון: $W(s)$

יודעים את מספר הקטבים בחצי הימני של $\boxed{s}$

מהו מספר האפסים? " " "

1) לשם כך נגדיר את הקונטור כך:



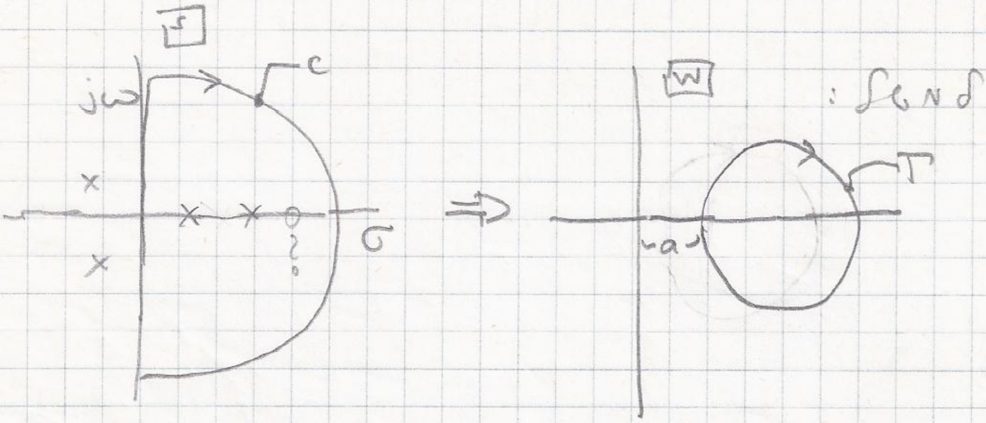
קונטור נייקויסט

—קג—

ב) צייר את T ונבדוק את N

לזכורת:

$N = Z - P$



$N = 0$, $P = 2$ $\Big\}$ $Z = N + P$

$Z = 0 + 2 = 2$

ג) נגדיר כעת את $W'(s) = W(s) + 1$

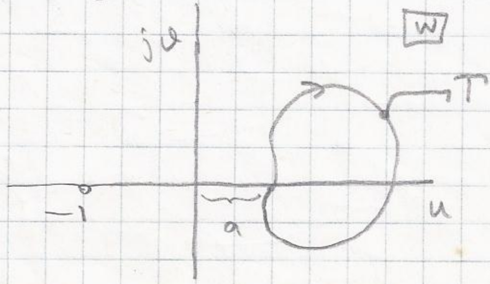
שאלה: האם הפסיקות של $W'(s)$ בחצי הימני של $\boxed{s}$

נציין: T העתקת C ע"י $W(s)$

אפשר למצוא: T' " C " $W'(s)$

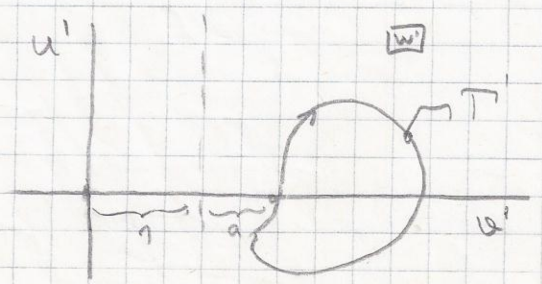
$u' = u + 1$

$v' = v$



הראשית של $\boxed{W'}$ היא הנקודה

$\boxed{W}$ ב -1



מספר האפסים של $W'(s)$ מוקפת ע"י

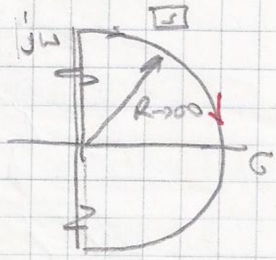
מספר ההקפות של הראשית של $\boxed{W'}$ כלו

נקודה: $-1, 0j$ של $\boxed{W}$

קריטריון של Nyquist (סיכום)

יציבות מוגדרת ע"י האפסים של $1+GH$

① ← לדעת מספר אפסים של $1+GH$ בחצי הימני של $\boxed{s}$



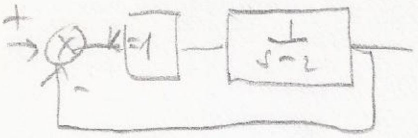
② ← נגדיר את C עם כיוון השעון

③ ← נצייר את T, העתקה של C דרך GH

④ ← נגדיר מהו N שהוא מספר ההקפות של הנקודה: $-1+0j$ במישור $\boxed{GH}$ ע"י T עם כיוון השעון

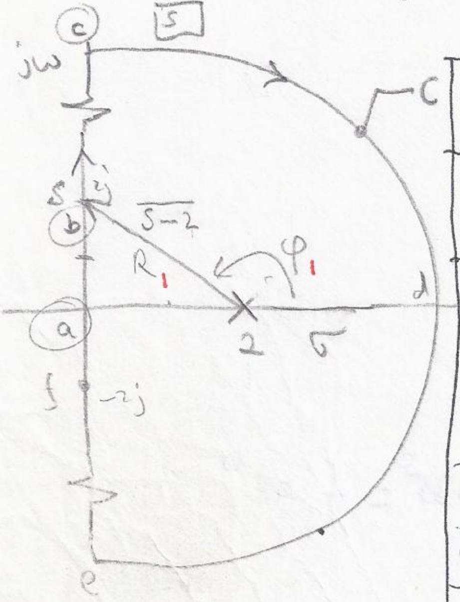
אזי: $\boxed{Z = N + P}$

כאשר P מספר הקטבים של GH בחצי הימני של $\boxed{s}$

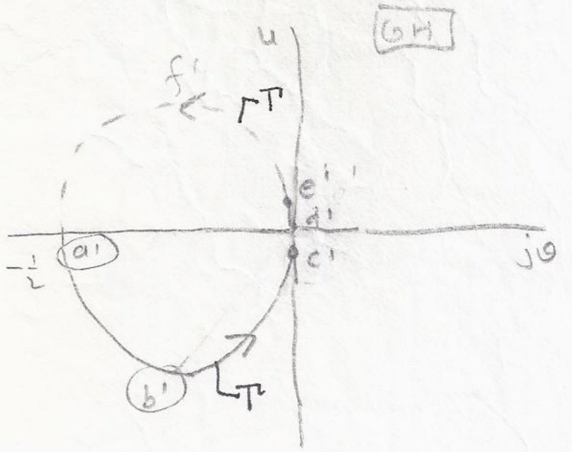


דוגמה :

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s-2)} = \frac{1}{R_1} e^{-j\varphi_1}$$



R	ϕ	נקודה	s	GH
2	180	a	0	$\frac{1}{2} e^{-180j} = \frac{1}{2}\angle -180^0 = -\frac{1}{2}$
$\sqrt{2}$	135	b	2j	$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-135j} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \angle -135^0$
∞	90	c	∞j	$\frac{1}{\infty} e^{-90j} = 0\ \angle -90^0$
∞	0	d	∞	$0\ \angle 0^\circ$
∞	-90	e	$-\infty j$	$0\ \angle 90^0$
$\sqrt{2}$	-135	f	-2j	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\ \angle +135^0$
2	180	a	0	$-\frac{1}{2}$



$\boxed{\text{המערכת לא יציבה}}$ ⇐

$$\left.\begin{matrix} N=0 \\ P=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow Z = N+P$$

$$\underline{Z = 0+1 = +1}$$

נוכיח כי נכון :

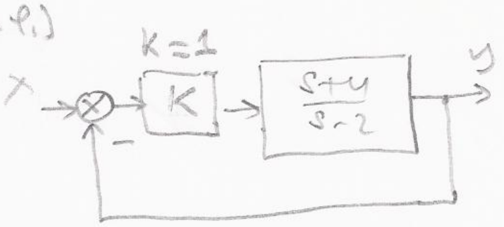
$$1+GH = 1 + \frac{1}{s-2}$$

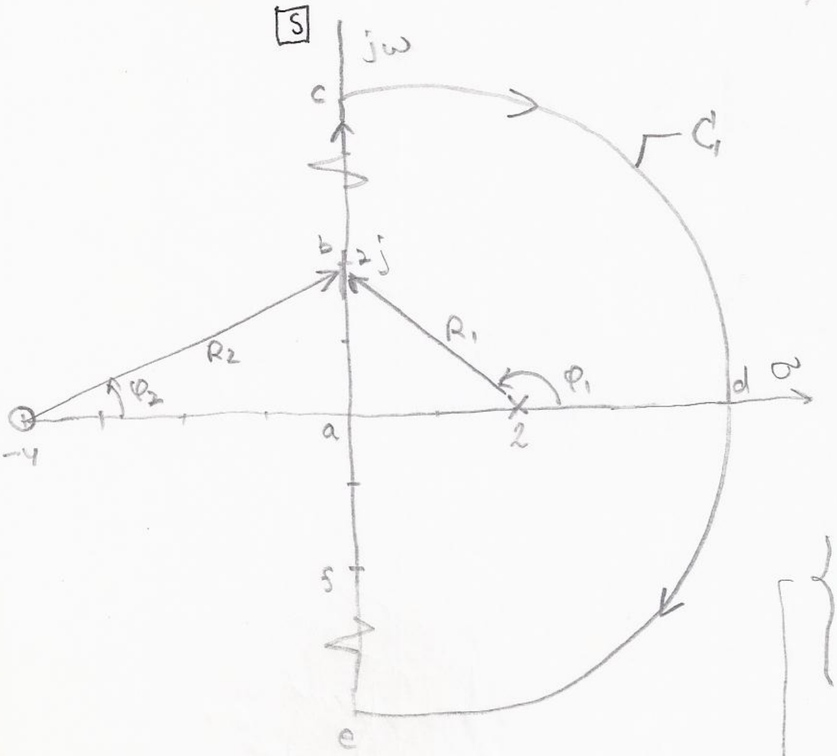
$$= \frac{s-2+1}{s-2} = \frac{(s-1)}{s-2} \Leftarrow$$

אפס אחד
בנקודה : s=1

דוגמה 2: (Nyquist)

$$G(S)H(S)=1\cdot\frac{S+4}{S-2}=1\cdot\frac{R_2}{R_1}e^{j(\varphi_2-\varphi_1)}$$

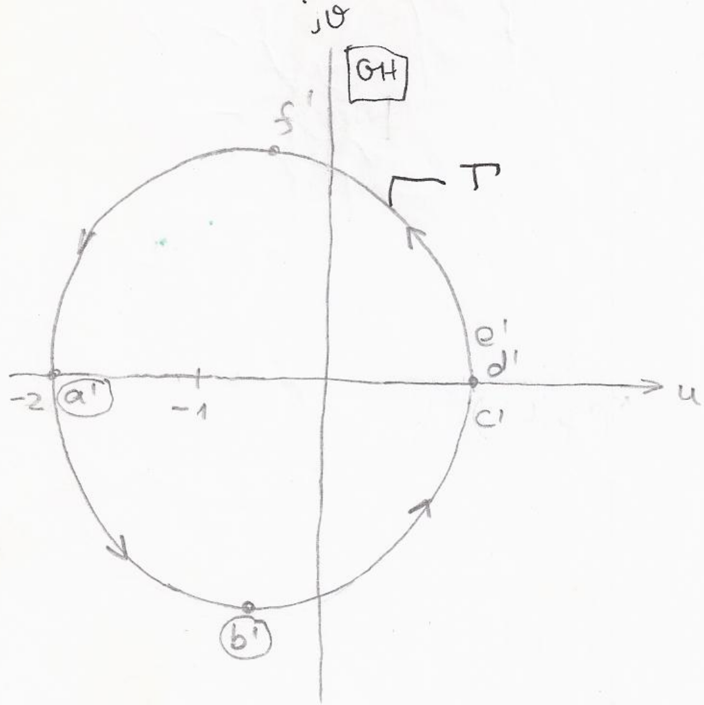




$\frac{R_2}{R_1}\cdot e^{j(\varphi_2-\varphi_1)}$

	S	$R_1\angle\varphi_1$	$R_2\angle\varphi_2$	GH
a	0	$2\angle+180°$	$4\angle0$	$2\ \angle-180°$
b	2j	$2\sqrt{2}\angle+135°$	$2\sqrt{5}\angle+26.5°$	$\sqrt{2.5}\ \angle-108°$
c	∞j	$\infty\angle+90°$	$\infty\angle+90°$	$1\ \angle0°$
d	∞	$\infty\angle0$	$\infty\angle0$	$1\ \angle0$
e	−∞j	$\infty\angle-90$	$\infty\angle-90°$	$1\ \angle0°$
f	−2j	$2\sqrt{2}\angle-135°$	$2\sqrt{5}\angle-26.5°$	$\sqrt{2.5}\ \angle+108°$

$$\lim_{s\to\infty j}\frac{s+4}{s-2}=\frac{1+\frac{4}{\infty j}}{1-\frac{2}{\infty j}}=1$$



$N=-1$

$P=1$

$Z=N+P=0\ \rightarrow$ יציב!

המערכת בחוג סגור יציבה

למרות שבחוג פתוח __לא__!

__באמת:__

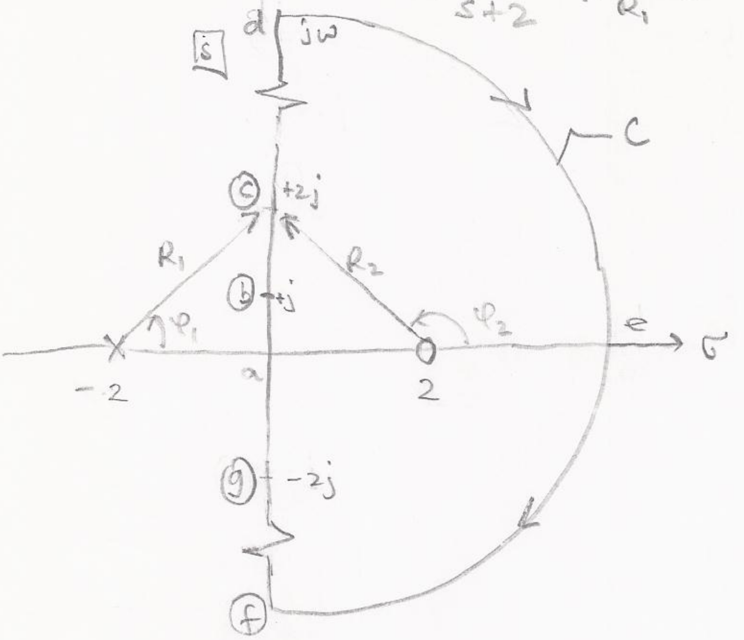
$$1+GH=1+1\cdot\frac{(S+4)}{(S-2)}=$$

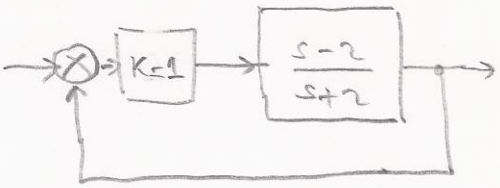
$$S-2+S+4=2S+2=0$$

יציב! $\boxed{S=-1}$

דוגמה 3 :

$$G(s)H(s)=K\frac{s-2}{s+2}=1\cdot\frac{R_2}{R_1}e^{j(\varphi_2-\varphi_1)}$$

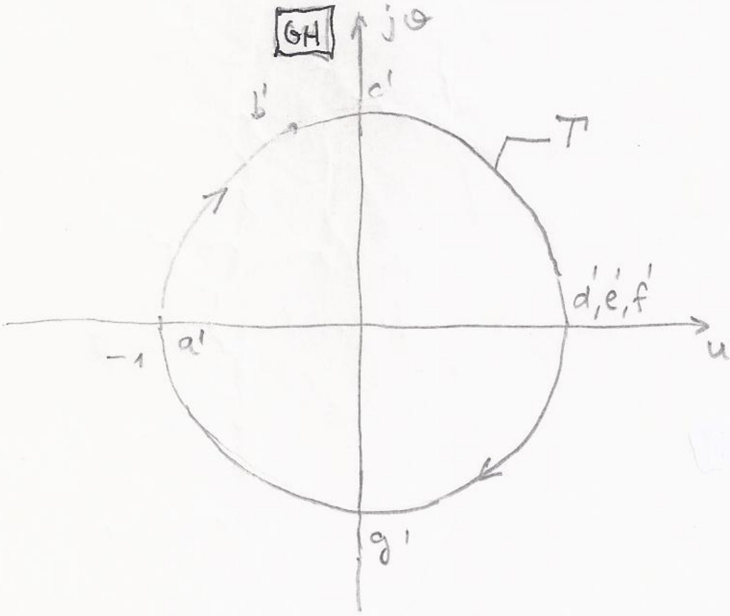




	$\boxed{s}$	$GH=1\cdot\frac{R_2}{R_1}\angle\varphi_2-\varphi_1$
a	0	1 $\angle+180$
b	+j	1 $\angle+126.8^\circ$
c	+2j	1 $\angle+90^\circ$
d	∞j	1 $\angle0$
e	∞	1 $\angle0$
f	-∞j	1 $\angle0$
g	-2j	1 $\angle-90^\circ$

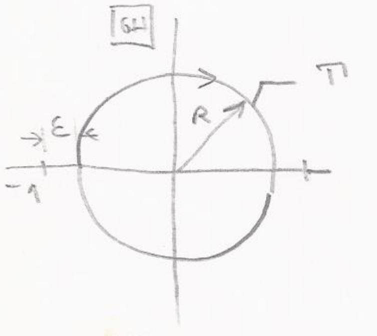
153.5 − 26.5 =

135 − 45 = 90



Γ עובר ממש דרך 1-

האם יציב או לא ?



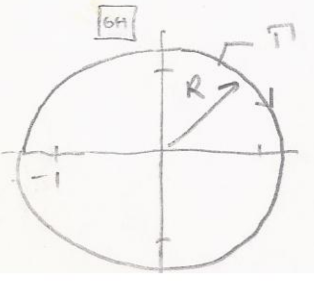
מקרה 1 :

$R=(1-\varepsilon_1)\frac{R_2}{R_1}=1-\varepsilon \leftarrow K=1-\varepsilon$

$\varepsilon\to0$

$N=0$

$P=0 \quad Z=N+P=0$



$R=1+\varepsilon \qquad K=1+\varepsilon$

$N=+1$

$P=0 \quad Z=1+0=1$

לא יציב

$s=j\omega$ [illegible] [illegible]

אסימפטוט:

$$GH(j\omega)=\frac{K}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+1)}=\frac{K}{j\omega(-\omega^2+3j\omega+2)}$$

$$=\frac{K}{j\omega\{(2-\omega^2)+3j\omega\}}=\frac{K}{\omega}\cdot\frac{1}{-3\omega+(2-\omega^2)j}$$

$$=\frac{K}{\omega}\cdot\frac{-3\omega-(2-\omega^2)j}{9\omega^2+(2-\omega^2)^2}=\frac{K}{\omega}\cdot\frac{-3\omega-(2-\omega^2)j}{9\omega^2+4-4\omega^2+\omega^4}$$

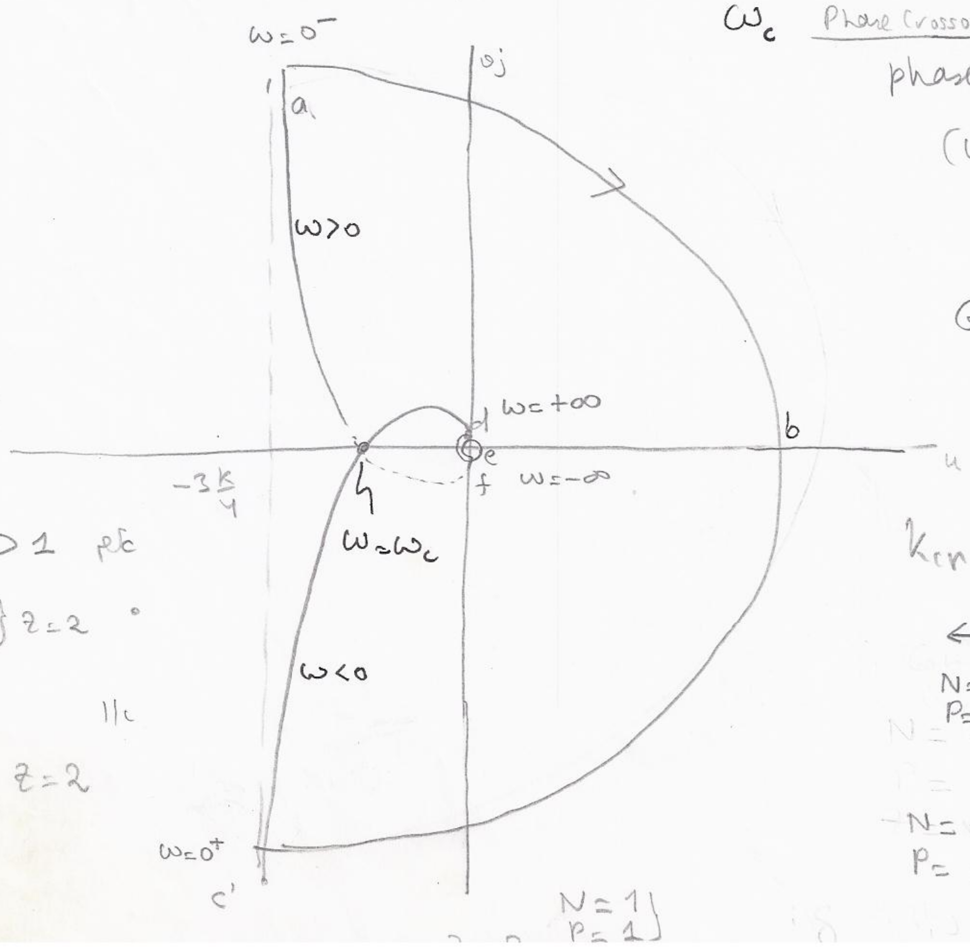
$$GH(j\omega)=\underbrace{\frac{-3K}{\omega^4+5\omega^2+4}}_{\text{ממשי}}-\underbrace{\frac{K}{\omega}\cdot\frac{(2-\omega^2)j}{(\omega^4+5\omega^2+4)}}_{\text{ב'מ''ן'}}$$

1) אסימפטוטות.

$\omega=0^+$ ⇐ c' בנקודה

$$GH=-\frac{3K}{4}-\infty j$$

2) Phase Crossover. ω_c



phase crossover:

$$(\omega^2-2)=0$$

$$\omega_c=\pm\sqrt{2}\ \text{rad/sec}$$

$$GH(\omega_c)=\frac{-3K}{4+10+4}=$$

$$GH(\omega_c)=-\frac{K}{6}$$

$$K_{cr}=6$$

[illegible]

$|GH(\omega_c)|<1$ אם ←

$$\left.\begin{matrix}N=0\\P=0\end{matrix}\right\}Z=N+P=0$$

או דרך זו:

$$\left.\begin{matrix}N=-1\\P=1\end{matrix}\right\}Z=0$$

$|GH(\omega_c)|>1$ אם

$$\left.\begin{matrix}N=2\\P=0\end{matrix}\right\}Z=2$$

או

$$\left.\begin{matrix}N=1\\P=1\end{matrix}\right\}Z=2$$

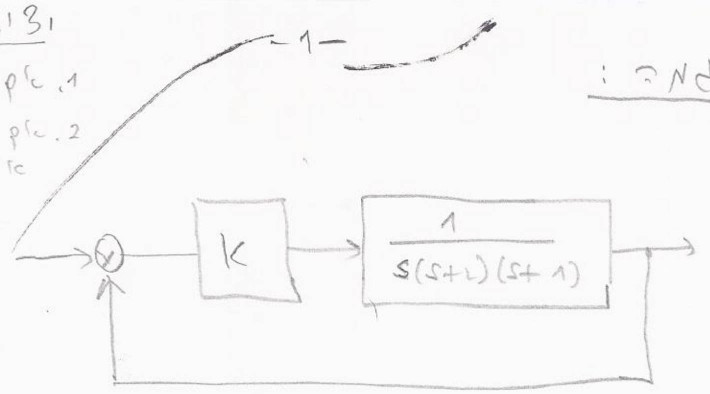
$$\left.\begin{matrix}N=1\\P=1\end{matrix}\right\}$$

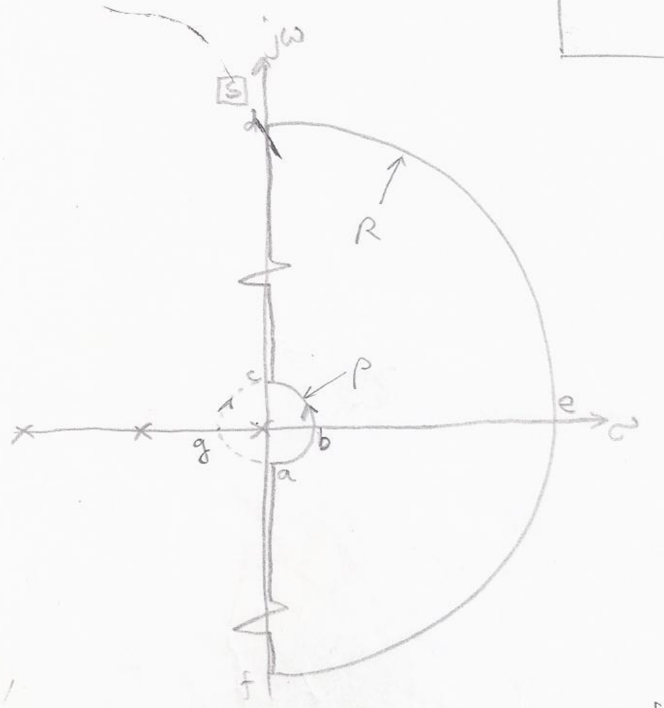
יציבות יחסית

1. אם יציב , כמה ?
2. אם לא יציב אז לא מספיק , יציב
איך ניתן לשפר

Gain margin (GM)
Phase margin (PM)

דוגמה :





מעגל קטן : a,b,c $s=\rho e^{j\phi}$

$$GH=\frac{K}{\rho e^{j\phi}(\rho e^{j\phi}+1)(\rho e^{j\phi}+2)}$$

$$\lim_{\rho\to 0} GH=\infty e^{-j\phi}$$

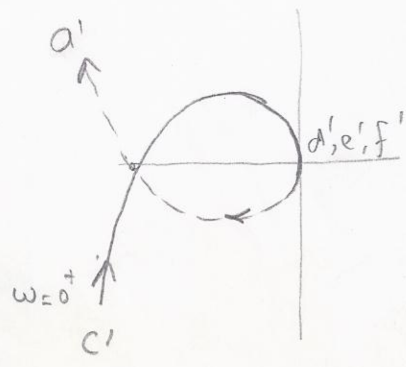
מעגל גדול : d,e,f $s=Re^{j\phi}$

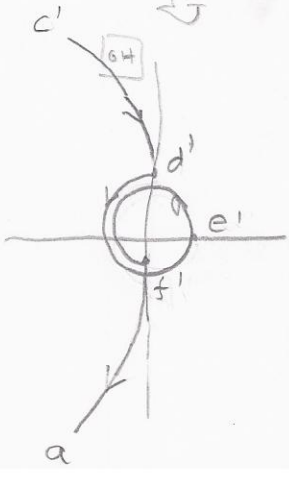
$$GH=\frac{K}{Re^{j\phi}\cdot(Re^{j\phi}+1)(Re^{j\phi}+2)}$$

$$\lim_{R\to\infty} GH=0\,e^{-3j\phi}$$

	מעגל קטן			מעגל גדול			
	a	b	c	d	e	f	g
$\boxed{s}$	$0\angle -90°$	$0\angle 0°$	$0\angle +90°$	$\infty\angle +90°$	$\infty\angle 0°$	$\infty\angle -90°$	$0\angle -180°$
$\boxed{GH}$	$\infty\angle +90$	$\infty\angle 0$	$\infty\angle -90°$	$0\angle -270°$	$0\angle 0$	$0\angle +270°$	$\infty\angle +540$

⇓





מסקנה $k=0$ ⇐ גבול היציבות ⇐ הקוטב הסגור ממש ב
פות $j\omega$!

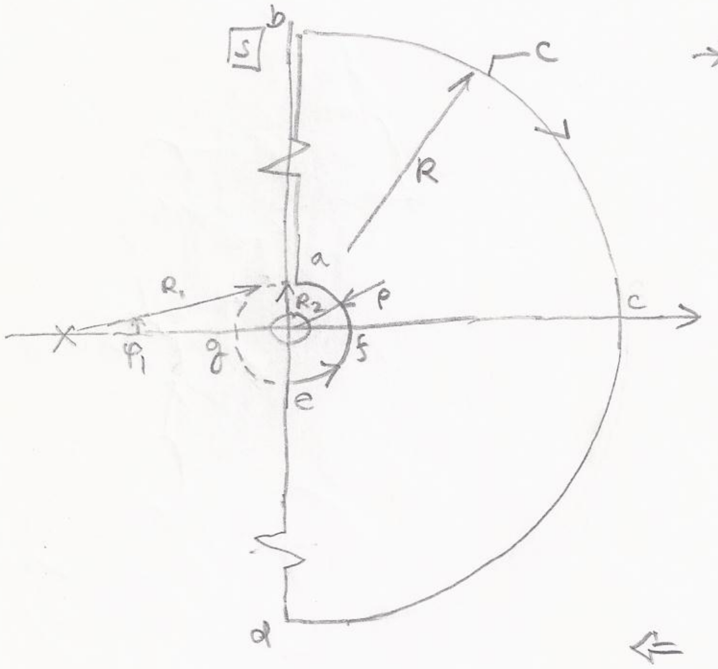
$$1+GH = 1+\frac{(s-2)}{(s+2)} = \frac{s+2+s-2}{s+2} = \frac{s}{s+2} = 0$$

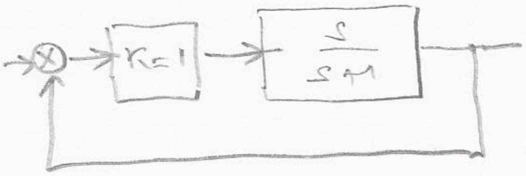
$\boxed{s=0}$ גבול היציבות

מקרה של אפס או קוטב על $j\omega$

אפס:

$$GH = \frac{s}{s+1} = \frac{R_2}{R_1}e^{j(\varphi_2-\varphi_1)}$$





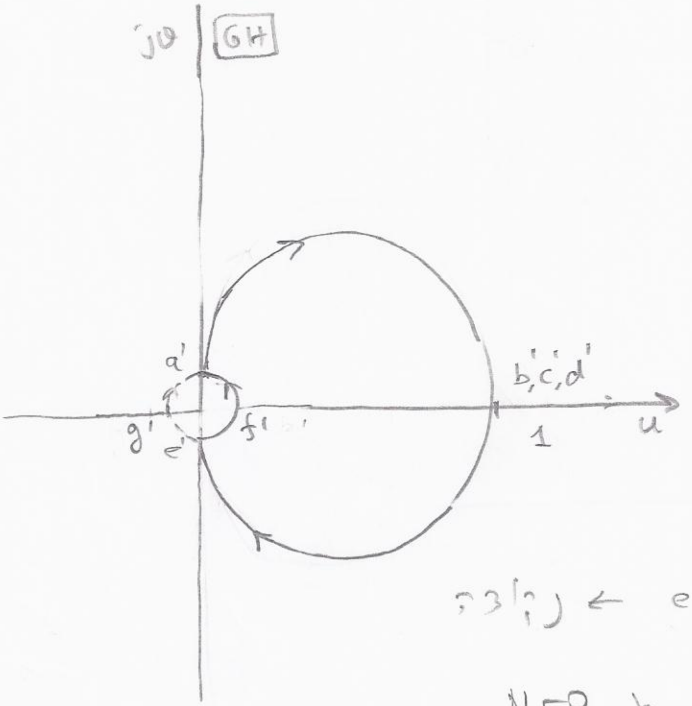
	$\boxed{s}$	$\boxed{GH}$
a	$0\angle 90^\circ$	$0\angle +90^\circ$
b	$\infty\angle 90^\circ$	$1\angle 0^\circ$

① חצי מעגל גדול (b,c,d) ⇐ $s=Re^{j\varphi}$

$$GH = \frac{Re^{j\varphi}}{Re^{j\varphi}+1} \; ; \; \lim_{R\to\infty} GH = \underset{b'c'd}{1e^{0j}} \xrightarrow[1\ \text{ב}]{}$$

② מעגל קטן: (e,f,a) ⇐ $s=\rho e^{j\varphi}$

$$GH = \frac{\rho e^{j\varphi}}{\rho e^{j\varphi}+1} \qquad \lim_{\rho\to 0} GH = \rho e^{j\varphi}$$



	S	GH
e	0∠-90°	0∠-90
f	0∠0°	0∠0
a	0∠+90°	0∠+90°
g	0∠180°	0∠180°

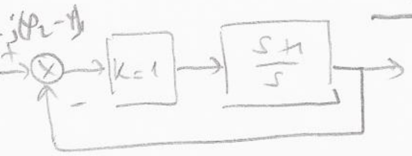
ראשית סביב המעגל e'f'o' ← נקודה

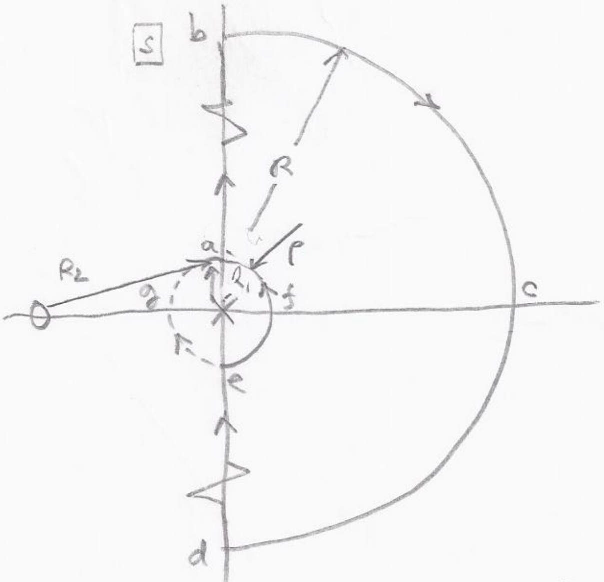
<u>יציב</u> $z = N + P = 0$ $\left.\begin{matrix} N=0 \\ P=0 \end{matrix}\right\}$

משני המקרים

<u>קוטב בראשית</u>

$GH = \frac{s+1}{s} = \frac{R_2}{R_1} e^{j(\varphi_2-\varphi_1)}$





	S	GH
a	0∠90	∞∠-90°
b	∞∠90	1∠0°
e	0∠-90	∞∠+90°

קטע b, c, d

מעגל גדול

$s = Re^{j\varphi}$

$\Leftarrow GH = \frac{Re^{j\varphi}+1}{Re^{j\varphi}}$

$\Leftarrow R \to \infty$

$GH = 1e^{0j}$

مسیر e,f,a :

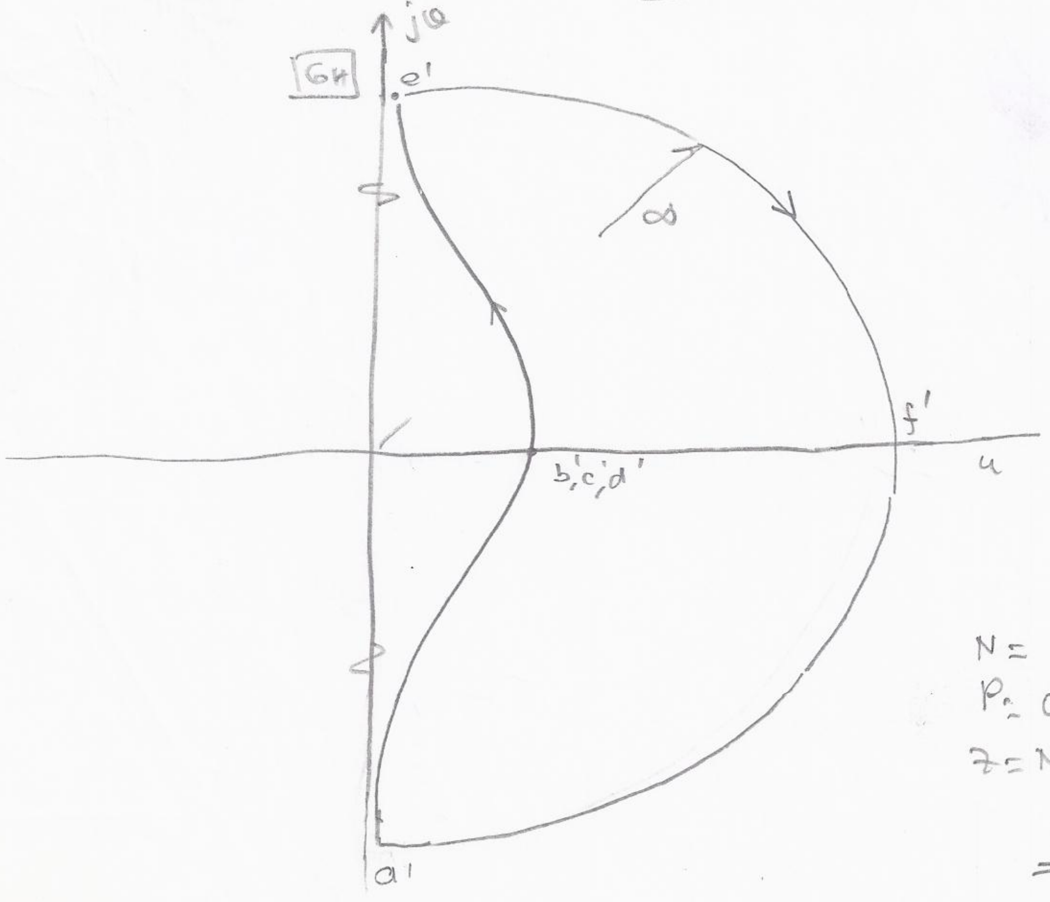
$s=\rho e^{j\varphi}$

$\Leftarrow GH=\dfrac{\rho e^{j\varphi}+1}{\rho e^{j\varphi}}$

$\Leftarrow \rho \to 0$

$GH=\dfrac{1}{0 e^{j\varphi}}=\infty e^{-j\varphi}$

	$\boxed{s}$	$\boxed{GH}$
e	$0\angle -90°$	$\infty\angle +90°$
f	$0\angle 0°$	$\infty\angle 0°$
a	$0\angle +90°$	$\infty\angle -90°$
g	$0\angle 180°$	$\infty\angle -180°$



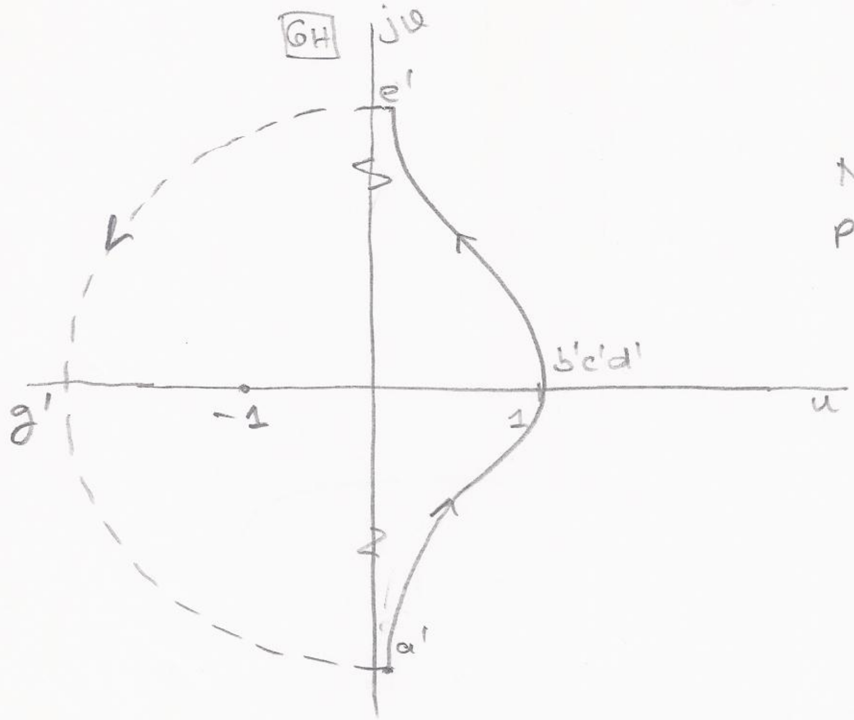
$N=0$
$P=0$
$Z=N+P=0$

پایدار

$1+GH=1+\frac{s+1}{s}=2s+1$ روش دوم:

$\boxed{s=-0.5}$

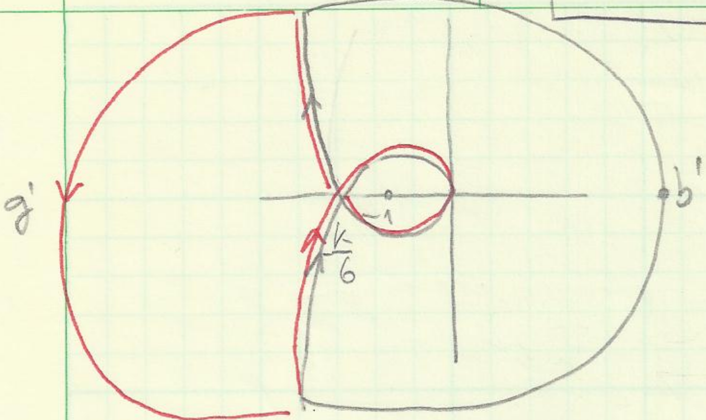
גרף g:



$$\left.\begin{array}{l} N=-1, \\ P=1 \end{array}\right\} Z=N+P=$$
$$-1+1=0$$

יציב!

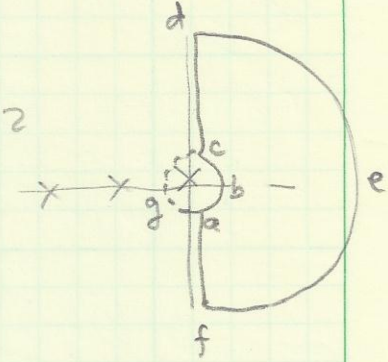
לא יציב $\boxed{K>K_{cr}}$



$N=2$
$P=0$ $\Big\}$ $Z=N+P=2$

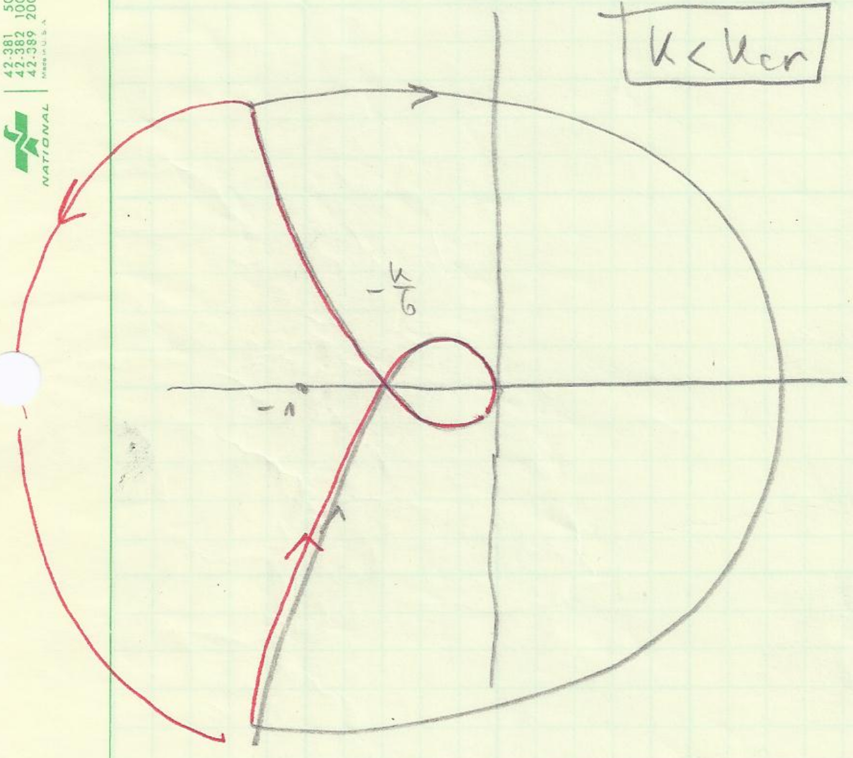
2 קטבים לא יציבים

$|GH(\omega_c)|>1$



$N=1$
$P=1$ $\Big\}$ $Z=2$

יציב $\boxed{K<K_{cr}}$



$N=0$
$P=0$ $\Big\}$ $Z=0$

$N=-1$
$P=1$ $\Big\}$ $Z=0$

בדיקת RH:

$$1+GH=1+\frac{K}{s^3+3s^2+2s}=s^3+3s^2+2s+K$$

	s^3+3s^2+2s+K		
s^3	1	2	
s^2	3	K	
s^1	$\frac{6-K}{3}$	$6-K>0$	$\boxed{K<6}$
s^0	K	$\boxed{K>0}$	

$\boxed{0<K<6}$

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot s + a_n = 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
\hline
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \\
 & \vdots & & & & \\
s^2 & e_1 & c_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 \cdot b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 \cdot b_3}{b_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \qquad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2}{c_1} \qquad d_2 = \frac{c_1 \cdot b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

סיכום Routh Horowitz לבדיקת יציבות

$$s^4 + as^3 + bs^2 + cs + d = 0$$

האם יש לפולינום שורשים בצד הימני מישור $\boxed{s}$?

<u>הבדיקה:</u>

	$as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e$		
s^4	a	c	e
s^3	b	d	0
s^2	$\left[\frac{bc-ad}{b}\right] \triangleq \alpha$	$\frac{be-a\cdot 0}{b} \triangleq \beta$	0
s^1	$\frac{\alpha\cdot d-\beta\cdot b}{\alpha}$	0	
s^0	β		

ניתן לראות מיד:

- כל המקדמים חיוביים לא חיוביים אלטרנטיביים
- אף מקדם וכו לא אפס

$\Uparrow$

לפי עמוד השמאל

סימן בעמודה:

= חילוף =

מספר שינויי סימן $\triangleq$

מספר קטבים בצד ימני

דוגמה 1:

$$s^3 + 2s^2 + s + k = 0$$

מצאו תחום יציבות של k

$s^3 + 2s^2 + s + k$

s^3	1	1	0
s^2	2	k	0
s^1	$\frac{2-k}{2}$	0	$\Rightarrow 2-k>0 \quad \boxed{k<2}$
s^0	$k \Rightarrow k>0$		

תחום יציבות

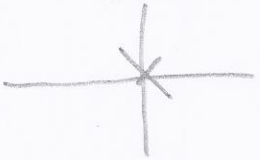
$$\underset{k_{cr_1}}{\overset{\Uparrow}{0}} < k < \underset{k_{cr_2}}{\overset{\Uparrow}{2}}$$

עבור $k_{cr_1}=0$:

$$s^3 + 2s^2 + s = 0$$

$$\underset{\Uparrow}{s}\cdot(s^2+2s+1) = 0 \Rightarrow s=0$$

גבול יציבות

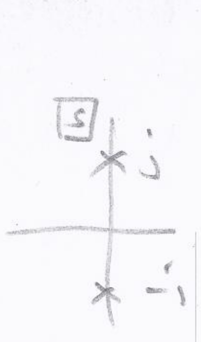


עבור $k_{cr_2}=2$

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

$$s^3 + s + 2s^2 + 2 = 0$$

$$s(s^2+1) + 2(s^2+1) = (s+2)\underset{\underset{s_{1,2}=\pm j}{\Uparrow}}{(s^2+1)} = 0$$



שאלה 2 :

$$s^3+3s^2+(k+3)s+(1-k)=0$$

	$s^3 + 3s^2 + (k+3)s + (1-k)$		
s^3	1	$k+3$	0
s^2	3	$1-k$	0
s^1	$\frac{3(k+3)-(1-k)}{3}$	0	$\Rightarrow 3k+9-1+k>0$ $4k+8>0 \Rightarrow$ $\boxed{k>-2}$
s^0	$1-k \Rightarrow 1-k>0 \Rightarrow \boxed{k<1}$		

תחום יציבות :

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ k_{cr_1}}}{-2} < k < \underset{\substack{\Uparrow \\ k_{cr_2}}}{1}$$

$$s^3+3s^2+s+3=0 \qquad k_{cr_1}=-2$$

$$s^3+s+3s^2+3=0$$

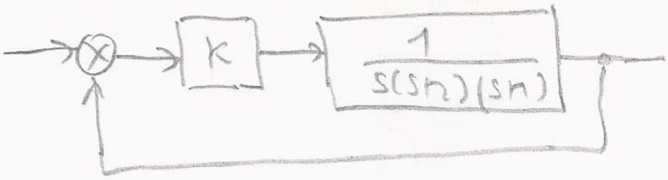
$$s(s^2+1)+3(s^2+1)=(s+3)(s^2+1)$$

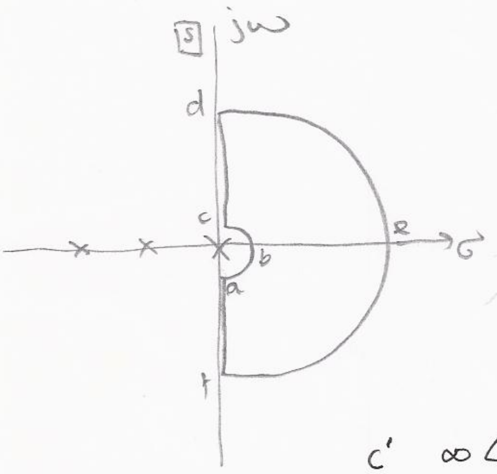
$$s_{1,2}=\pm j$$

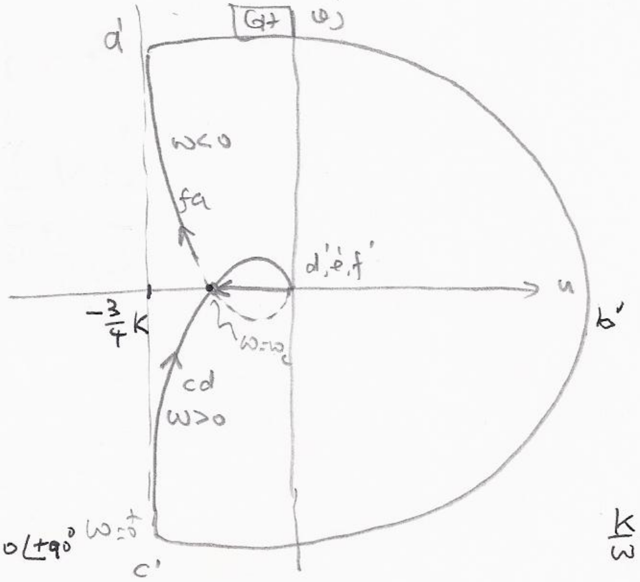
$$s^3+3s^2+4s=0 \qquad k_{cr}=1$$

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ s=0}}{s}\cdot(s^2+3s+4)=0$$

GM PM







c' $\infty\angle-90$

d' $0\angle-270 = 0\angle+90^\circ$

$\frac{K}{\omega}\cdot\frac{1}{-3\omega+(2-\omega^2)j}$

c,d $s=j\omega \Rightarrow GH(j\omega)=\frac{K}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+1)}=\frac{K}{j\omega(-\omega^2+3j\omega+2)}=$

$$GH(j\omega)=\underbrace{\frac{-3K}{\omega^4+5\omega^2+4}}_{\text{ממשי}}-\underbrace{\frac{K}{\omega}\cdot\frac{(2-\omega^2)}{(\omega^4+5\omega^2+4)}}_{\text{דמיוני}}\cdot j$$

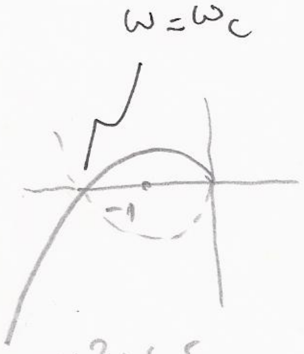
(נקודה c') $GH(0^+)=-\frac{3K}{4}-\infty j \Leftarrow \omega=0^+$ אסימפטוטה ①

$2-\omega^2=0$ Phase Crossover ②

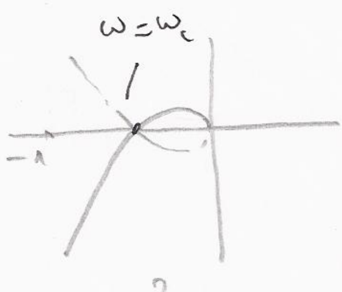
$\omega_c=\pm\sqrt{2}$ ω_c

$GH(\omega_c)=-\frac{3K}{18}=-\frac{K}{6}$

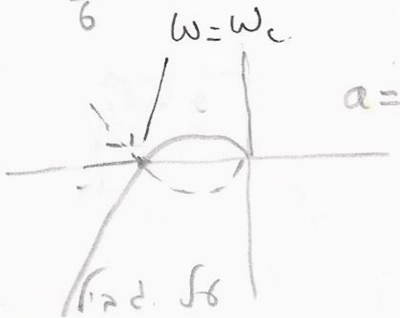
$a=|GH(\omega_c)|$.



לא יציב



יציב

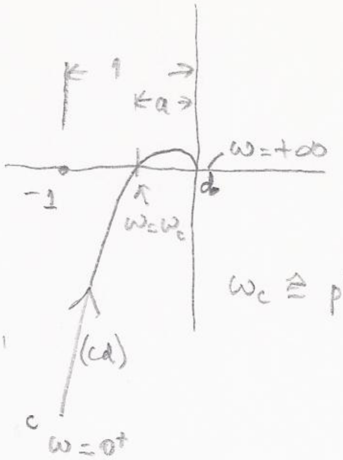


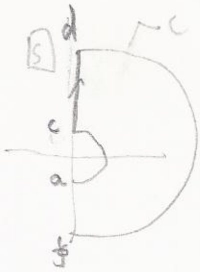
על גבול היציבות

יציב : $K < K_{cr}$

$K_{cr}=6$.

Gain margin:





$$GH(j\omega) = K\,\frac{Z(j\omega)}{P(j\omega)}$$

$$GM = \frac{1}{a} \triangleq \frac{K_{cr}\left|\frac{Z(j\omega_c)}{P(j\omega_c)}\right|}{K\left|\frac{Z(j\omega_c)}{P(j\omega_c)}\right|} = \frac{K_{cr}}{K}$$

$\omega_c \triangleq$ phase crossover

$$GM = \frac{1}{a} = \frac{1}{|GH(\omega_c)|} = \frac{K_{cr}}{K}$$

$$GM_{db} = 20\log\left(\frac{1}{a}\right)$$

פי כמה זה בכמה db
ניתן להגדיל את K
עד לגבול היציבות?

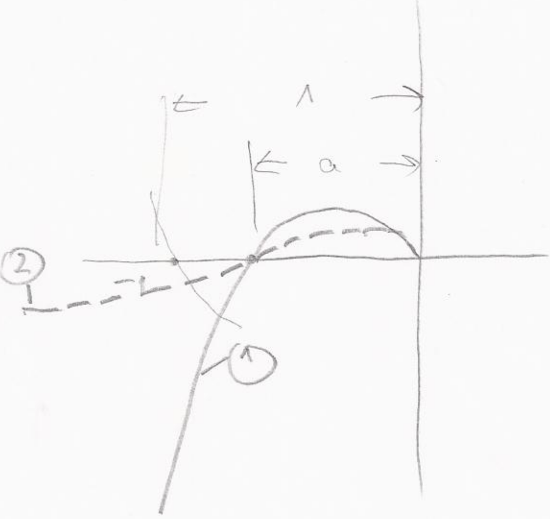
דוגמה:

$K_{cr}=6 \leftarrow K=3$

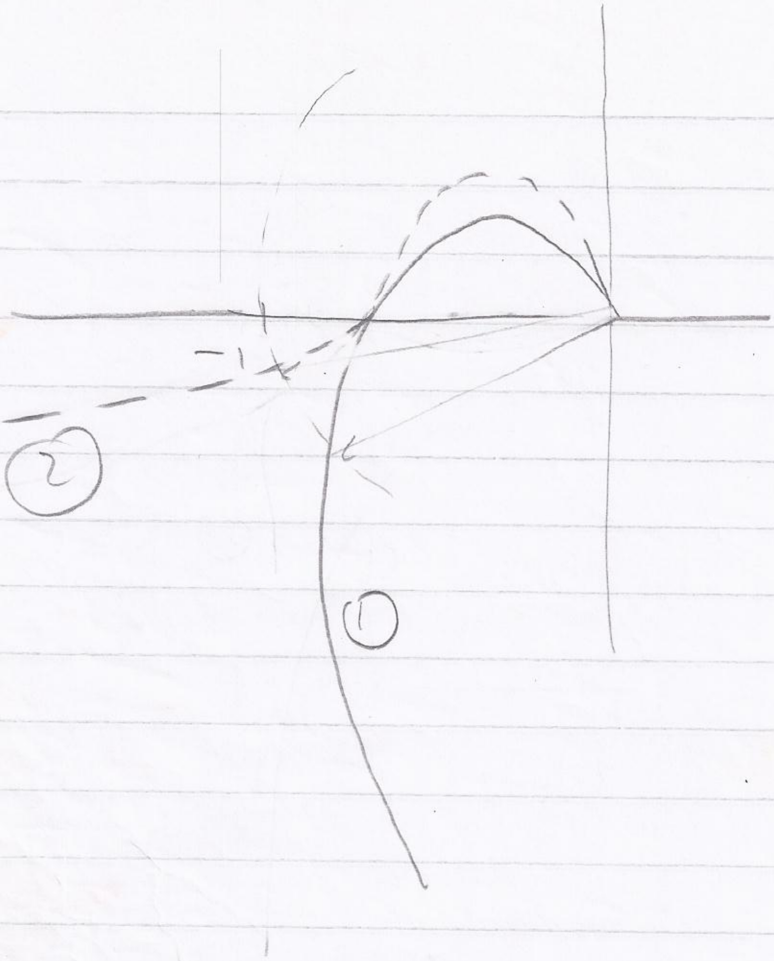
$GM=2$

$GM_{db} = 20\log 2 = 6db$

phase margin



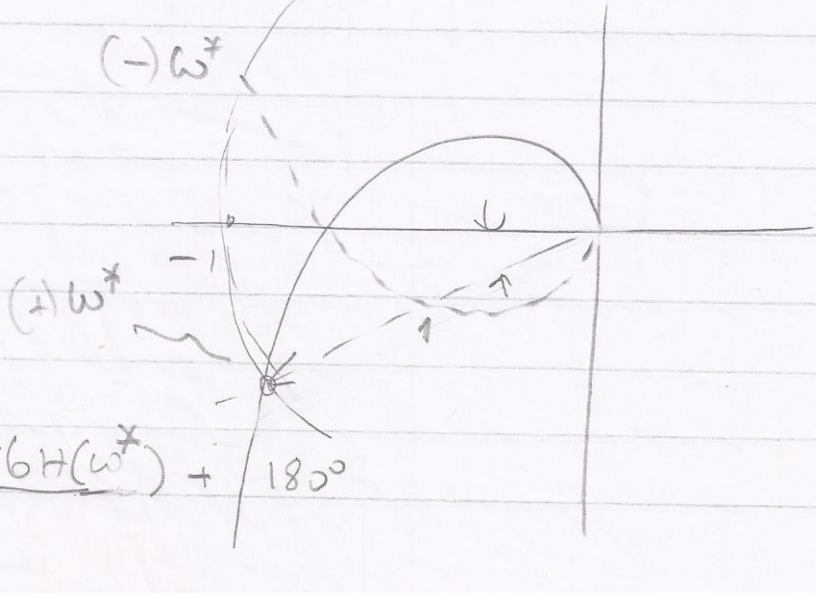
GM של ① ! ② אותו הגבר ; ② פחות יציב



G.M. for ① and ② is the same

but ② is much less stable because a small variation in parameters might make the system unstable.

Therefore: phase margin.



$Ph.M = \angle GH(\omega^*) + 180^\circ$

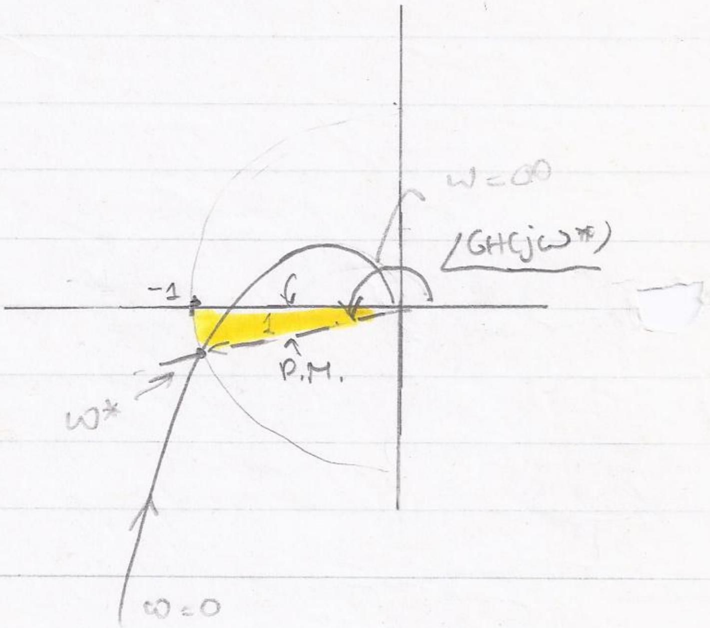
Phase - Margin הגדרה:

ω^* "gain" crossover for

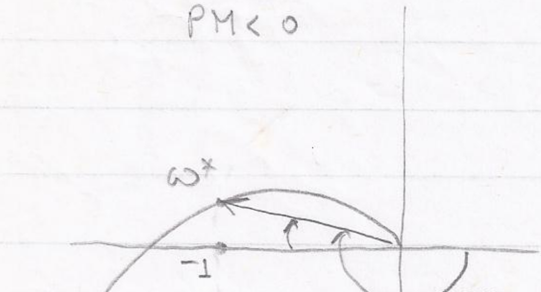
$|GH(j\omega^*)| = 1$

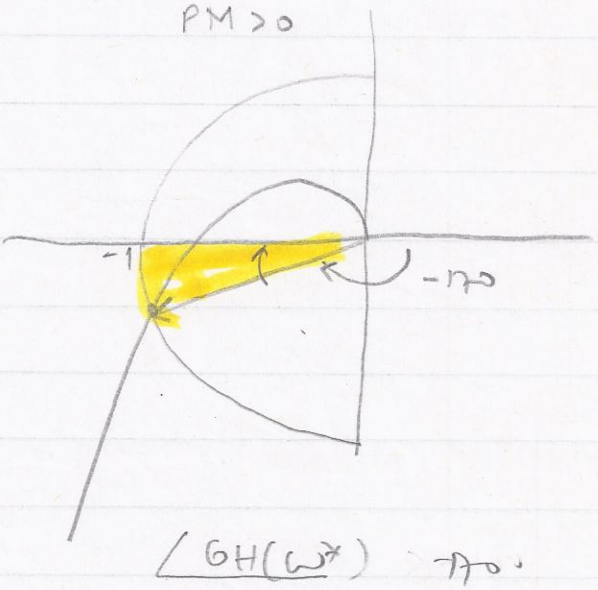
$P.M = \underline{\angle GH(j\omega^*)} + 180°$

כמה? רווח יש עד 180°



לדוגמה:





$\underline{\angle GH(\omega^*)} = -220$

$GM = -220 + 180 = -40$

$GM = -40$

לא יציב

$\underline{\angle GH(\omega^*)}$ -170.

$GM = -170 + 180 = 10$

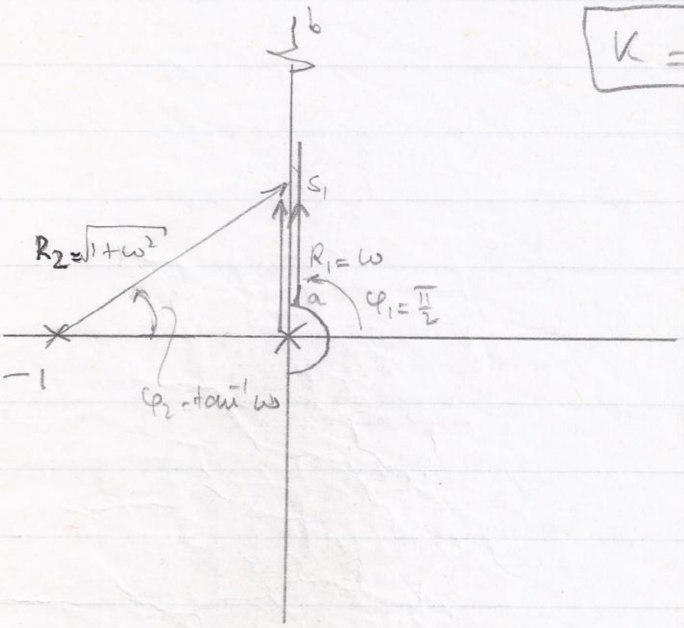
$GM = 10$

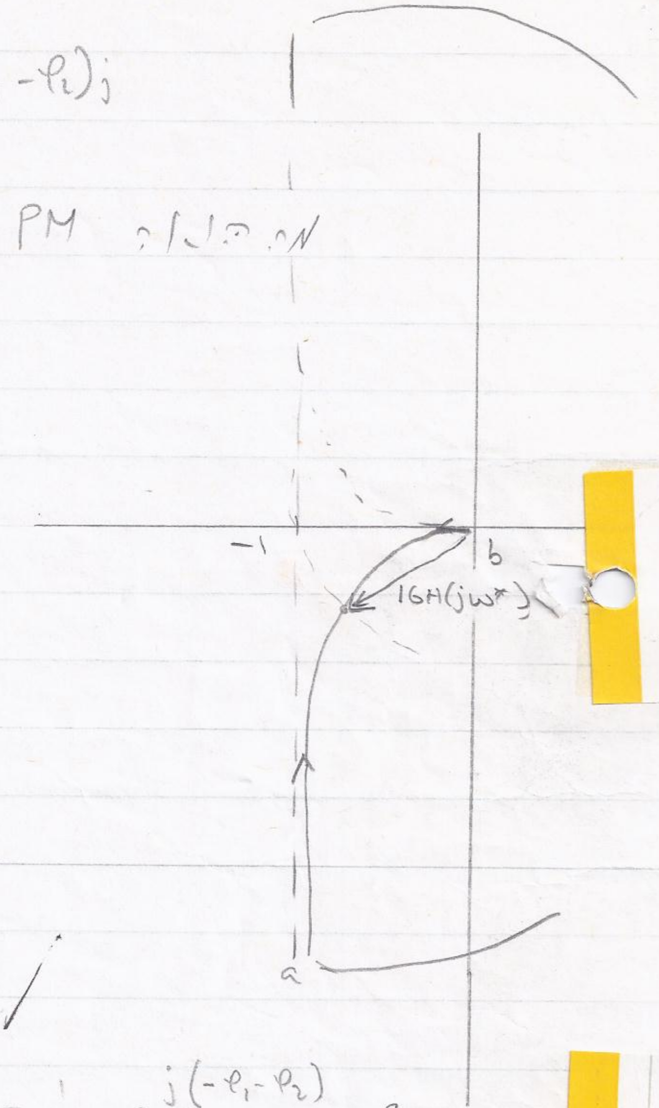
יציב

Example:

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)} = \frac{K}{R_1R_2} \cdot e^{j(-\varphi_1-\varphi_2)}j$$

מה הולה PM אם, $\boxed{K = 1}$





בין a ו b:

$$s = j\omega = \omega e^{\frac{\pi}{2}j}$$

$$GH = \frac{1}{R_1R_2} \cdot e^{j(-\varphi_1-\varphi_2)}$$

a

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{\underbrace{\omega}_{R_1}\underbrace{\sqrt{1+\omega^2}}_{R_2}} e^{(-\overset{\varphi_1}{\frac{\pi}{2}} - \overset{\varphi_2}{\tan^{-1}\omega})j}$$

$GH(s) = \infty \angle -90°$ $\omega \to 0^+$ עבור } נק' a

(כוו׳ר [illegible]) $GH(s) = 0 \angle -180°$ $\omega \to +\infty$ עבור } b ״

$|GH(j\omega^*)| = 1 \Rightarrow$

ω^* $\frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} = 1 \to \omega\sqrt{1+\omega^2} = 1 \to$

$\omega^2(1+\omega^2) = 1 \to$

$\omega^4 + \omega^2 - 1 = 0$

$\omega^{2*}_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} = 0.618$

$\omega^* = \pm 0.786$

$\angle GH(j\omega^*) = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} 0.786$

$= -90° - 38.2 = -128.2$

$P.M = \underline{\angle GH(j\omega^*)} + 180^\circ = -128.2^\circ + 180^\circ = +308.2 = \underline{\underline{51.8^\circ}}$

<u>Asymptote</u>:

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{1}{-\omega^2+j\omega} = \frac{-\omega^2+j\omega}{\omega^4+\omega^2}$$

$$GH(j\omega) = -\frac{1}{(\omega^2+1)} - j\frac{\omega}{\omega^4+\omega^2}$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} GH(j\omega) = -1-\infty j$$

What is the GM ?

$$GH(j\omega) = -\frac{k}{\omega^2+1} - jk\frac{\omega}{\omega^4+\omega^2}$$

Phase crossover: $\rho' e \partial \wedge N$ $\qquad -jk\frac{1}{\omega^3+\omega}$

ω_c $\qquad \underline{\angle GH(j\omega)} = 180^\circ \Rightarrow \qquad \omega \to +\infty \Rightarrow \omega_c = \infty$

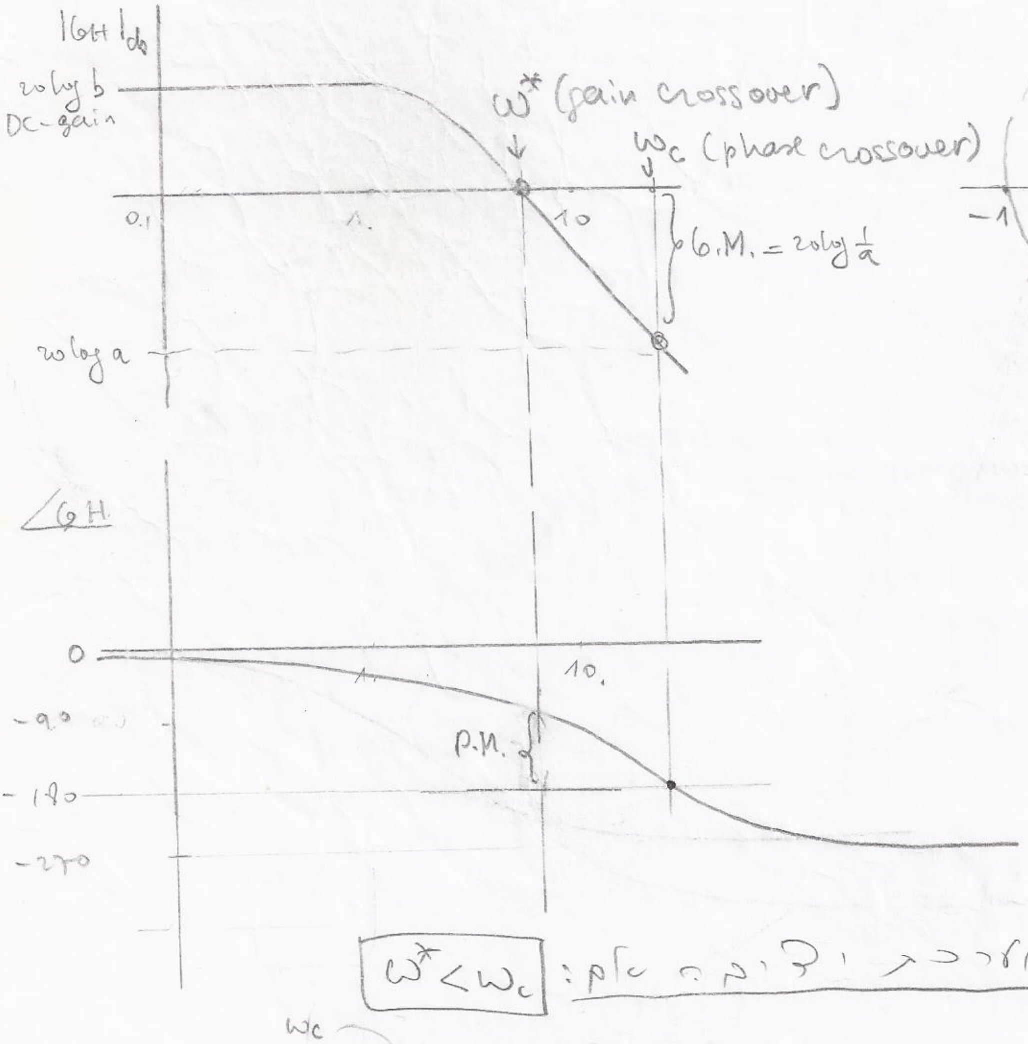
$$a = |GH(j\omega_c)| = 0 \quad \Rightarrow GM = \frac{1}{a} = \underline{\underline{\infty}}$$

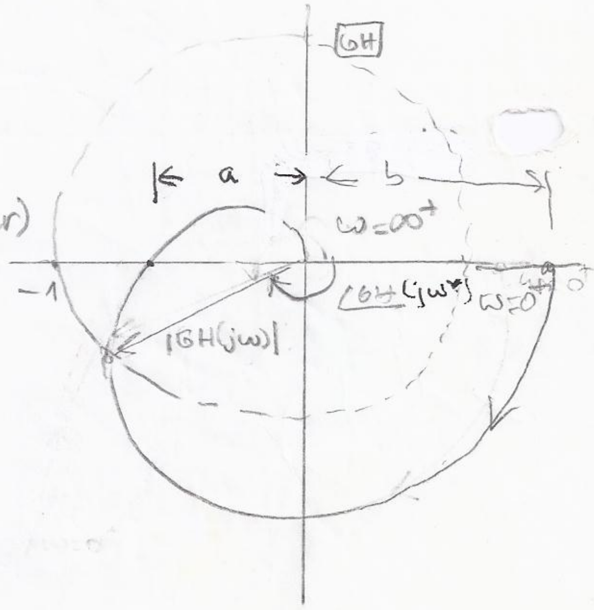
Asymptote:

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{1}{-\omega^2+j\omega} = -\frac{\omega^2 - j\omega}{\omega^4+\omega^2}$$

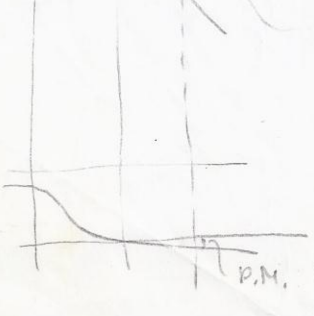
$$GH(j\omega) = -\frac{1}{(\omega^2+1)} - j\frac{\omega}{(\omega^4+\omega^2)}$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} GH(j\omega) = -1$$





המערכת יציבה אם: $\boxed{\omega^* < \omega_c}$



|GH| already larger than 1 →
no gainmargin at all

סדר שני:

$$GH(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$ $\boxed{s = j\omega}$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + 1} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j}$$

$$|GH|_{db} = -20\log\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\angle GH = -\tan^{-1}\left\{\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}\right\}$$

$\omega \ll$

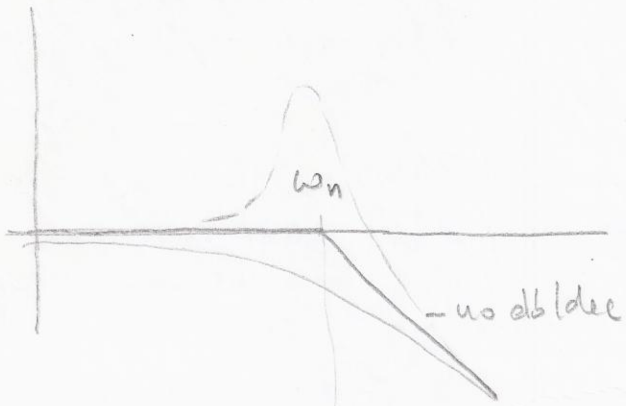
$|GH| \cong -20\log 1 = 0$

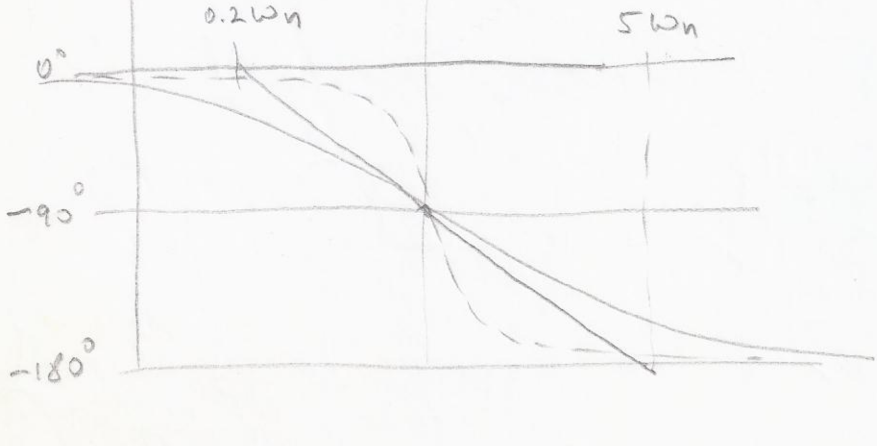
$\angle GH \cong 0°$

$\omega \gg$

$|GH| \cong -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \cong -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$

$\angle GH \cong -\tan^{-1}(0) = -180°$





Bode Schetching Rules

$GH(s) = \frac{a}{s+a}$ $\boxed{s=j\omega}$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(\frac{j\omega}{a}+1)}$$

$|GH(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\omega}{a})^2+1}}$ $|GH(j\omega)|_{db} = -20\log\sqrt{(\frac{\omega}{a})^2+1}$

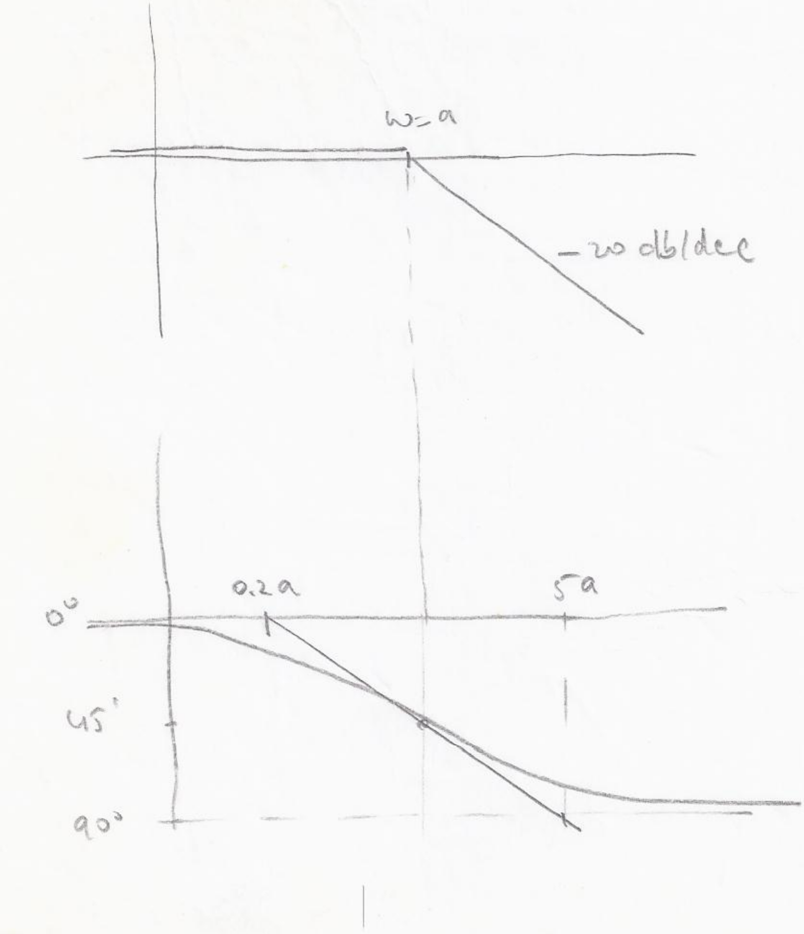
$\angle GH(j\omega) = -\tan^{-1}(\frac{\omega}{a})$

$\omega << a$

$|GH|_{db} \approx -20\log 1 = 0$ $\angle GH \approx -\tan^{-1}(0) = -0°$

$\omega >> a$

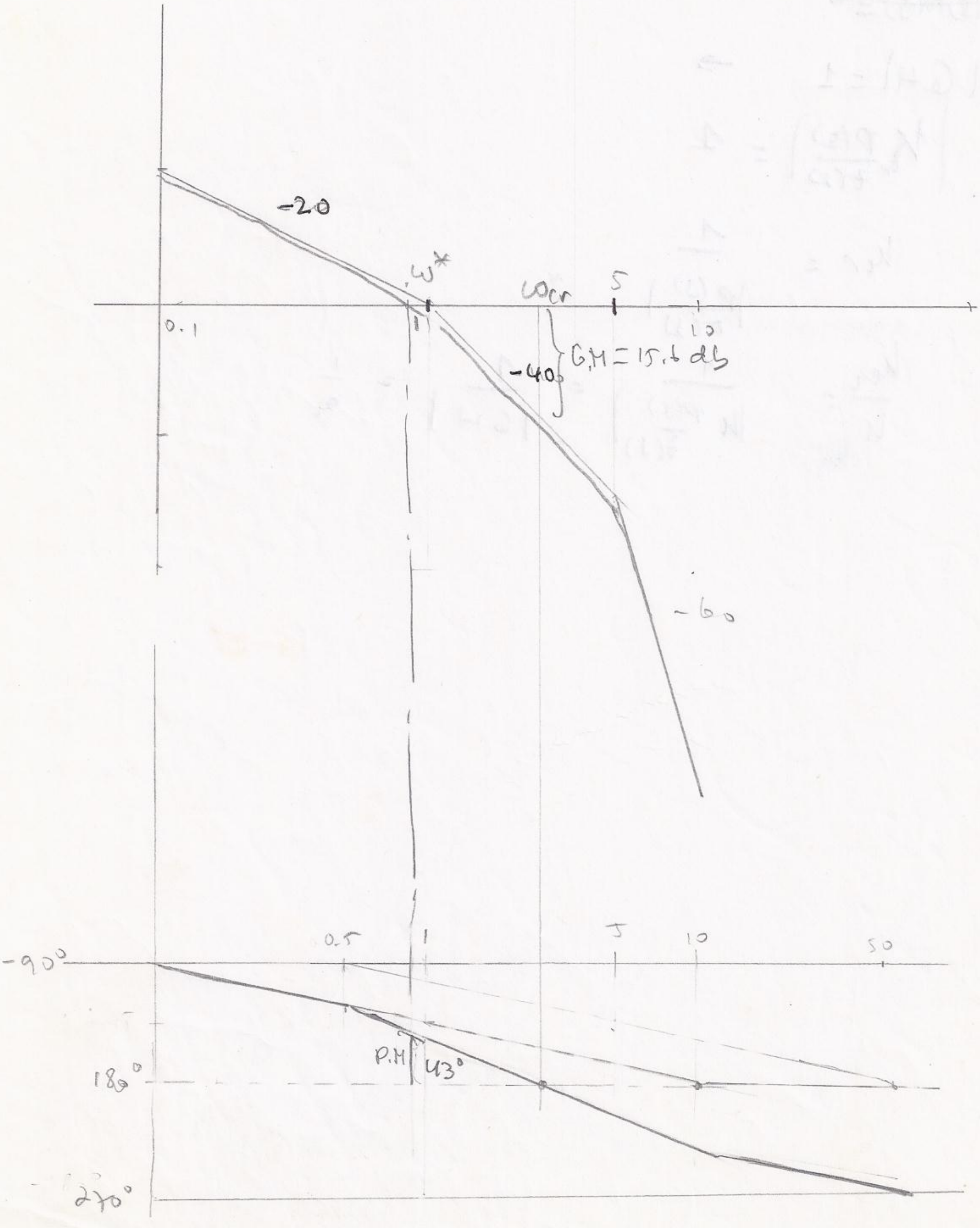
$|GH|_{db} \approx -20\log(\frac{\omega}{a})$ $\angle GH \approx \tan^{-1}(\infty) = -90°$



$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.2s+1)}$$

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(0.2j\omega+1)}$$

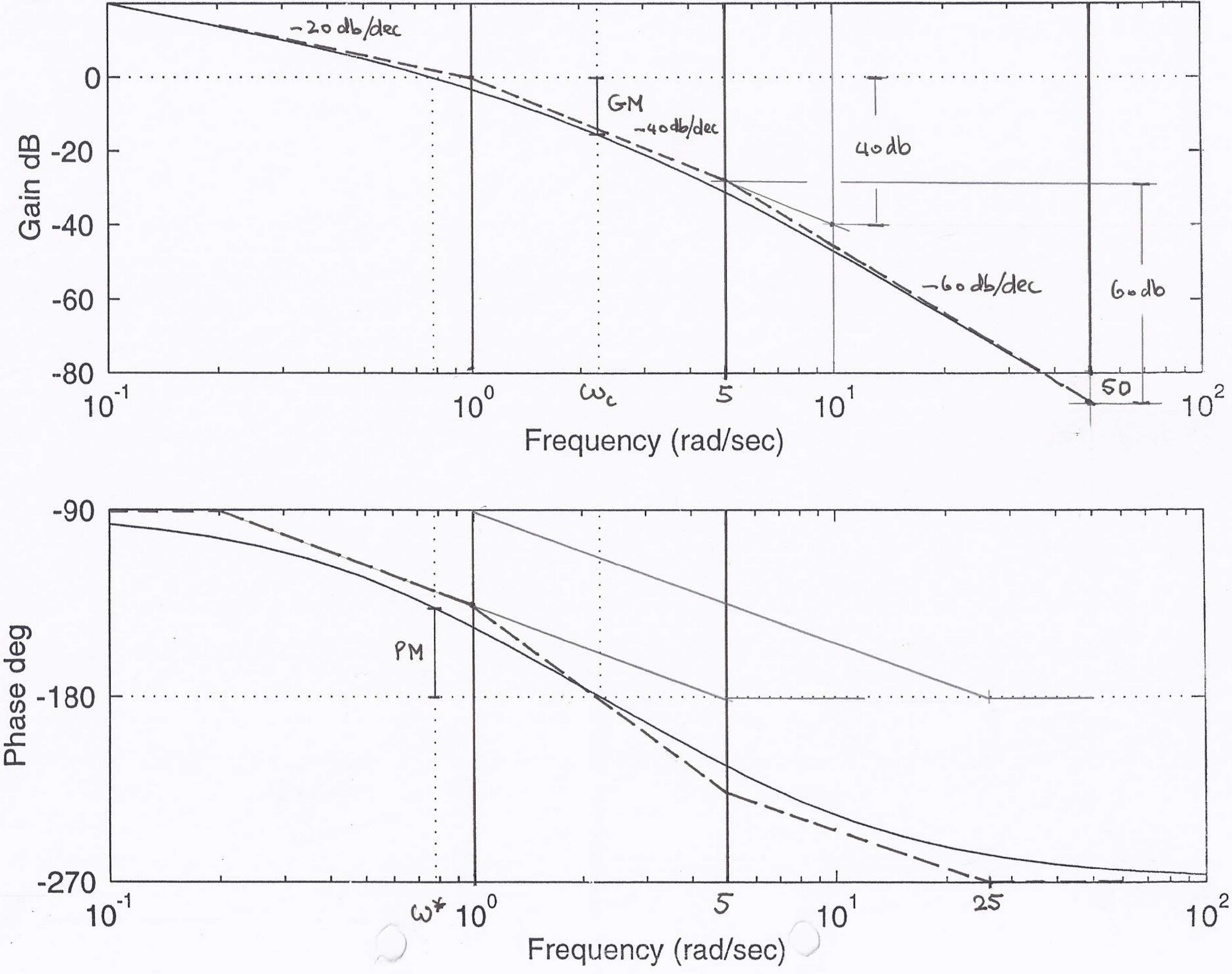
$$|GH(j\omega)|_{db} = -20\log\omega - 20\log\sqrt{\omega^2+1} - 20\log\sqrt{0.04\omega^2+1}$$



45°/dec /order

$GH = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(0.2j\omega+1)}$

Gm=15.56 dB, (ω= 2.236) Pm=43.21 deg. (ω =0.7793)



$$GH = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(0.2j\omega+1)}$$