

תרגול 1 – משוואת הגלים**1. משוואת הגלים על מיתר סופי**

נבחן מיתר בעל אורך L בעל תנאי שפה כלשהם.

א. רשום את משוואת הגלים, תנאי ההתחלה ותנאי השפה.

ב. הצב פיתרון מן הצורה $\psi(x, t) = g(x) f(t)$, והראה כי ניתן להפוך את המד"ח לסט (אינסופי) של מד"רים בלתי מצומדים.

ג. פתור את המד"ר עבור $f(t)$, ו- $g(x)$ בהתחשב בתנאי ההתחלה והשפה.

ד. רשום פתרון כללי למשוואה בהינתן תנאי התחלה כלשהם.

פתרון:

א. משוואת הגלים עבור המיתר נתונה ע"י:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

C - מהירות התקדמות הגל בתווך.

מכיוון שהמשוואה הינה מסדר שני בזמן ובמרחב נזדקק לשני תנאי שפה ושני תנאי התחלה. תנאי השפה יכולים להיות כלליים כפי שנראה בהמשך. נבחן מקרה ספציפי עבורו:

המיתר קשור בצידו האחד אזי: $\psi(x=0, t) = 0$.

המיתר משוחרר בצידו האחר ולכן: $\left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$.

כמו כן יש לספק שני תנאי התחלה - $\left. \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} \right|_{t=0} = l(x)$, $\psi(x, t=0) = h(x)$.

שימו לב! משוואה דיפרנציאלית הינה חסרת משמעות ללא תנאי התחלה!

ב. הצבת פתרון מהצורה $\psi(x, t) = g(x) f(t)$:

משוואת הגלים (עבור תנאי שפה אלה) הינה משוואה "ספרבילית" כלומר ניתן לכתוב את הפתרון כמכפלה של פתרון התלוי בזמן ופתרון התלוי במרחב. ככלל אצבע, משוואה ספרבילית הינה משוואה הניתנת לכתיבה כסכום של איברים אשר כל אחד מהן תלוי אך ורק באחד המשתנים ובנגזרותיו.

בהצבת הפתרון נקבל:

$$\frac{1}{c^2} f''(t) g(x) = f(t) g''(x) \Rightarrow \frac{f''(t)}{c^2 f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}$$

נשים לב כי צד ימין של המשוואה תלוי רק ב- x ואילו צד שמאל תלוי רק ב- t .

ולכן שניהם צריכים להיות שווים לקבוע: $-k^2$. לקבוע זה יחידות של תדר מרחבי $[k] = [rad / m]$.

ג. נפתור את המשוואה:

$$\begin{aligned} g_k''(x) + k^2 g_k(x) &= 0 \\ g_k(x=0) &= 0, \quad g_k'(x=L) = 0 \end{aligned}$$

הפתרון הכללי למשוואה הינו:

$$g_k(x) = A_k e^{ikx} + B_k e^{-ikx}$$

מתנאי ההתחלה הראשון נקבל:

$$g_k(x=0) = A_k + B_k = 0 \Rightarrow A_k = -B_k$$

מתנאי ההתחלה השני נקבל:

$$g_k'(x=L) = 2k \cos(kL) = 0 \Rightarrow k = \frac{\pi}{2L} + \frac{\pi}{L} n = \frac{\pi}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right), n \in \mathbb{Z}$$

שימו לב כי קיבלנו סט **דיסקרטי** של תדירויות. בהמשך בקורס נראה כי זוהי תכונה כללית של משוואות גלים במרחב תחום.

סט הפונקציות $g_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx)$, $k = \frac{\pi}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right), n \in \mathbb{Z}$ הוא למעשה טור פוריה המהווה סט

פורש ואורתונורמלי - $(g_k, g_{k'}) = \int_0^L g_k * g_{k'} = \delta_{k,k'}$ למרחב הפונקציות על הקטע $[0, L]$ המקיימות

את תנאי השפה.

כעת נפתור את החלק הזמני:

$$f_k''(t) + \omega(k)^2 f_k(t) = 0, \quad \omega^2 = c^2 k^2$$

שימו לב כי לקבוע ω יחידות של תדר זמני $[\omega] = [rad / sec]$.

הקשר $\omega^2 = c^2 k^2$ נקרא יחס הנפיצה. ומייצג את הקשר בין התדרים המרחביים והזמניים. ניתן לראות קשר זה כרישום במרחב פוריה של משוואת הגלים.

שימו לב כי קיבלנו סט אינסופי של משוואות דיפרנציאליות רגילות עבור הפרמטר k .

כלומר ניתן לפתור עבור כל תדר בנפרד!

פתרון המשוואה הינו :

$$f_k(t) = C_k e^{i\omega(k)t} + D_k e^{-i\omega(k)t}$$

ד. כעת נרשום את הפתרון הכללי של המשוואה :

$$\psi(x, t) = \sum_k g_k(x) f_k(t) = \sum_k \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx) [C_k e^{i\omega t} + D_k e^{-i\omega t}]$$

כל שנותר לנו כעת הוא למצוא את המקדמים C_k, D_k .

זאת ניתן לעשות באמצעות תנאי ההתחלה :

נגדיר :

$$h(x) \equiv \psi(x, t=0)$$

$$l(x) \equiv \left. \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} \right|_{t=0}$$

נרשום בעזרת פיתוח פוריה :

$$h(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_k a_k \sin(kx), \quad a_k = (g_k, h(x))$$

$$l(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_k b_k \sin(kx), \quad b_k = (g_k, l(x))$$

ונקבל שני תנאים (מדרישת האורתונורמליות) :

$$h(x) = \psi(x, t=0) = \sum_k g_k [C_k + D_k] \Rightarrow C_k + D_k = a_k$$

$$l(x) = \left. \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_k g_k [i\omega C_k - i\omega D_k] \Rightarrow i\omega(C_k - D_k) = b_k$$

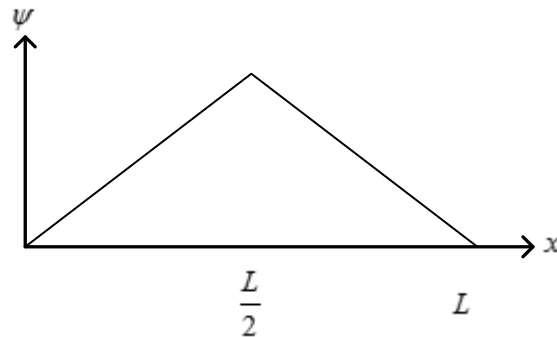
ולכן:

$$C_k = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{b_k}{i\omega} \right), \quad D_k = \frac{1}{2} \left(a_k - \frac{b_k}{i\omega} \right)$$

וכעת ניתן לייצג את הפתרון בעזרת תנאי ההתחלה הנתונים.

דוגמא – מיתר משולש בזמן $t=0$

נתון מיתר גיטרה באורך L הקשור בשני צדדיו. ψ מתאר את הזזת המיתר ממצב שיווי משקל. נניח שהבאנו את המיתר לצורה הבאה:



במקרה זה, תנאי השפה הם של מיתר הקשור בשני קצותיו הם:

$$\psi(x=0, t) = \psi(x=L, t) = 0$$

תנאי ההתחלה, מכיוון שאנו משחררים את המיתר ממצב מנוחה נדרוש שדה מהירויות אפס, קרי:

$$l(x) \equiv \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

ובנוסף נתאר את צורת המיתר בהתחלה:

$$h(x) \equiv \psi(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ L-x & \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}$$

נפעיל את תנאי השפה ונקבל:

$$g_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx), \quad k = \frac{\pi}{L} n, n \in \mathbb{Z} (n \neq 0)$$

נפעיל את תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(x, t) &= \sum_k g_k(x) \dot{f}_k(t) = \sum_k \sqrt{\frac{2}{L}} i\omega \sin(kx) [C_k e^{i\omega t} - D_k e^{-i\omega t}] \\ \dot{\psi}(x, 0) &= 0 \Rightarrow C_k = D_k \end{aligned}$$

סה"כ קיבלנו עד כה:

$$\psi(x, t) = \sum_k g_k(x) f_k(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_k C_k \sin(kx) \cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned} a_k = (g_k, h(x)) &= \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx) h(x) dx = \sqrt{\frac{2}{L}} \left[\int_0^{L/2} x \sin(kx) dx + \int_{L/2}^L (L-x) \sin(kx) dx \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \left[\int_0^{L/2} x \sin(kx) dx + \int_0^{L/2} x' \sin(k(L-x')) dx' \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \left[\int_0^{L/2} x \sin(kx) dx - (-1)^n \int_0^{L/2} x' \sin(kx') dx' \right] \\ &= (1 - (-1)^n) \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right) - \frac{kL}{2} \cos\left(\frac{kL}{2}\right)}{k^2}, \quad k = \frac{\pi}{L} n, n \in \mathbb{Z} (n \neq 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_{2n+1} = 2\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{\pi}{L}(2n+1)\right)^2}$$

$$\psi(x, t) = \sum_k g_k(x) f_k(t) = \frac{4L}{\pi^2} \sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{L}x\right) \cos(\omega t)$$

2. מגלים במיתר סופי לפורייה

נסתכל על מיתר באורך $L \rightarrow \infty$, בעל תנאי שפה: $\psi(x, t) = \psi(x + L, t)$.

ניתן בקלות לנחש פתרון לבעיה מסוג זה, נבחן את הפונקציה: $\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$, תנאי השפה מנתיבים את התנאי הבא:

$$e^{i(k(x+L) - \omega t)} = e^{i(kx - \omega t)} \Rightarrow e^{ikL} = 1 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{L}n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

הערה: עבור גלים במיתר קשור, ראינו ש- $k = \frac{\pi}{L}n$ ואילו במקרה זה, המיתר אינו קשור וקיבלנו

$$k = \frac{2\pi}{L}n$$

ניתן לפתח (כמעט) כל פונקציה שמקיימת את משוואת הגלים כסופרפוזיציה של איברים מהצורה הנ"ל:

$$f(x, t) = \sum_n \alpha_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}, \quad k_n = \frac{2\pi}{L}n; \omega_n = \frac{2\pi}{L}v \cdot n$$

הערה: באופן כללי היחס בין ω ל- k נקבע לפי משוואת הגלים הספציפית. במקרה שלנו היחס הוא לינארי.

המטרה היא למצוא את α_n . ראשית, נשים לב שהפונקציה שלנו ספרבולית ולכן נסתכל על החלק המרחבי

$$f(x) \equiv \sum_n \alpha_n e^{ik_n x}$$

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ik_m x} dx &= \sum_n \alpha_n \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_n - k_m)x} dx \\ \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k_n - k_m)x} dx &= \frac{e^{i(k_n - k_m)L/2} - e^{-i(k_n - k_m)L/2}}{i(k_n - k_m)} = \begin{cases} L & n = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ik_m x} dx &= L \alpha_m \end{aligned}$$

ולכן קיבלנו ש-

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ik_n x} dx$$

נציב תוצאה זו חזרה ונזכור ש- $L \rightarrow \infty$,

$$f(x) = \sum_n \frac{e^{ik_n x}}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ik_n x} dx \stackrel{L \rightarrow \infty}{=} \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

נגדיר, התמרת פורייה,

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

נגדיר גם את התמרת פורייה ההפוכה,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

נחזור לביטוי הקודם,

$$f(x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx'} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x'-x)}$$

בתרגול הבא נראה ש- $\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x'-x)}$ זוהי בעצם פונקציית הדלתא של דיראק:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x'-x)} = 2\pi \delta(x'-x)$$

הראינו כאן בעצם את קיומה של ההתמרה ההופכית, או, במילים אחרות את זהות היחידה.