# הצטלבות עם הציר הממשי

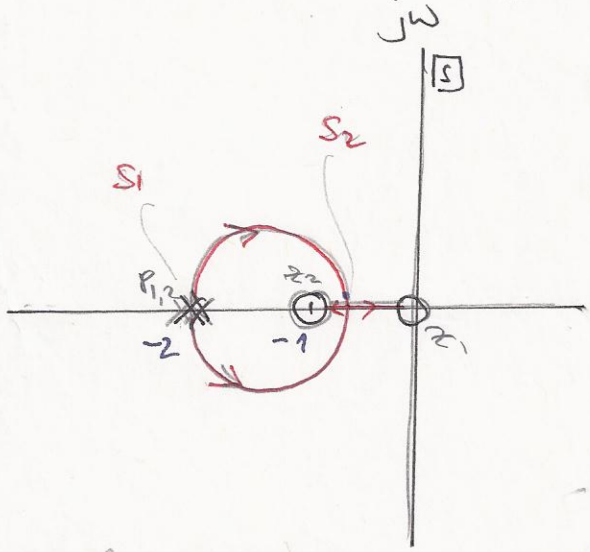
*)

5 ב). באופן כללי ניתן למצוא את נקודות ההצטלבות ע"י:

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{G(s)H(s)}\right]=0$$

דוגמה:

$$GH=K\frac{s(s+1)}{(s+2)^2}$$




$$\frac{d}{ds}\left[\frac{(s+2)^2}{(s^2+s)}\right]=$$

$$2(s+2)(s^2+s)-(s+2)^2(2s+1)=0$$

$$(s+2)\{\cancel{2s^2}+2s-\cancel{2s^2}-5s-2\}=0$$

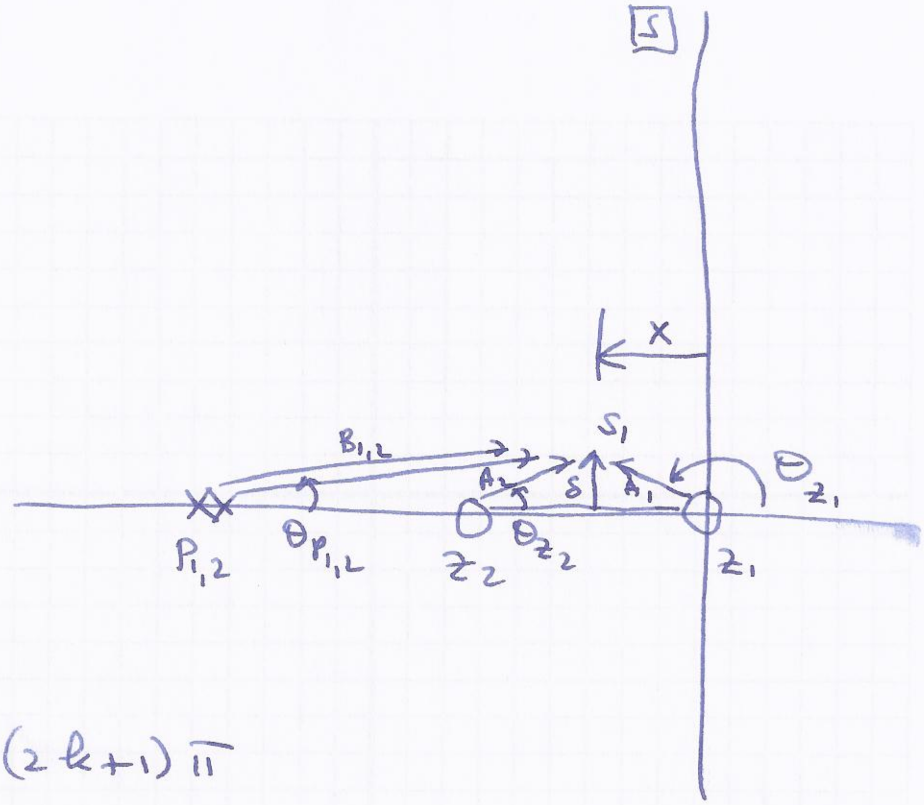
$$(s+2)(-3s-2)=0$$

$$s_1=-2$$

$$s_2=-\frac{2}{3}$$

מה הגבר במקום ההתפלגות?

לפי הכלל הקודם:




$$\sum \theta = (2k+1)\pi$$

$$\theta_{z_1} + \theta_{z_2} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} = (2k+1)\pi$$

$$\left(\cancel{\pi} - \frac{\delta}{A_1}\right) + \frac{\delta}{A_2} - \frac{\delta}{B_1} - \frac{\delta}{B_2} = \cancel{\pi}$$

$$-\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2} = 0$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{(1-x)} - \frac{2}{(2-x)} = 0$$

$$-(1-x)(2-x) + x(2-x) - 2x(1-x) = 0$$

$$-(2-3x+x^2) + 2x - x^2 - 2x + 2x^2 = 0$$

$$-2 + 3x \cancel{-x^2} + \cancel{2x} \cancel{-x^2} \cancel{-2x} + \cancel{2x^2} = 0$$

$$-2 + 3x = 0 \qquad \boxed{x = \frac{2}{3}} \qquad s_1 = -\frac{2}{3}$$

R.L.

אלה הנגזרים
אין הכל?

[illegible]

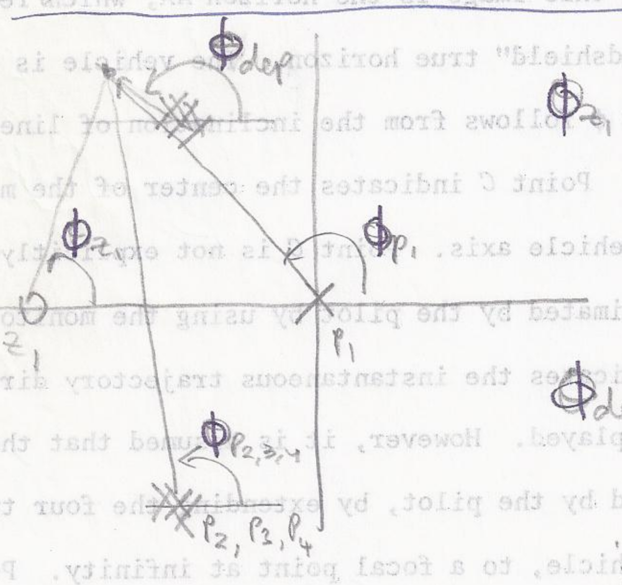
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] ⑥




$$\Phi_z - \{\Phi_{p_1} + \Phi_{p_2} + \Phi_{p_3} + \Phi_{p_4} + n\Phi_{dep}\} = (2k+1)\pi$$

$$\Phi_{dep} = \frac{1}{n}\{(2k+1)\pi + \sum \Phi_{others}\}$$

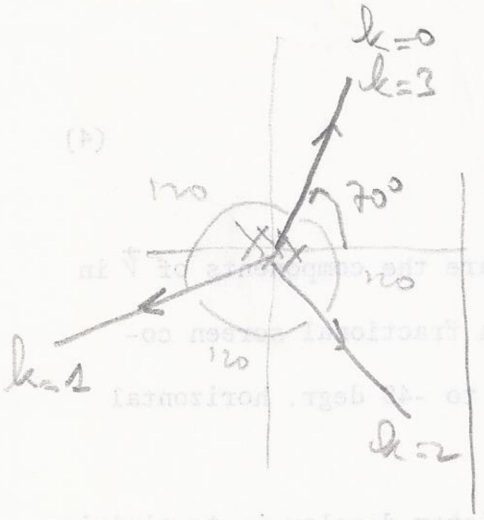
[illegible]

$$\Phi_{am} = \frac{1}{n}\{(2k+1)\pi - \sum \Phi_{others}\}$$

$$\sum_{others} = [\sum \Phi_z - \sum \Phi_p]$$

[illegible]

[illegible]




$n=3$

$\sum \Theta_{others} = 30^\circ$

$$\Theta_{dep} = \frac{1}{3}\left\{(2k+1)\pi + 30^\circ\right\}$$

$$\Theta_{dep} = k\frac{2\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{3} + \frac{30^\circ}{3}\right)$$

$$\Theta_{dep} = k\,120^\circ + 70^\circ$$

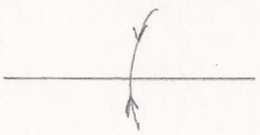
$k=0 \rightarrow \Theta_{dep_1} = 70^\circ$

$k=1 \rightarrow \Theta_{dep_2} = 190^\circ$

$k=2 \rightarrow \Theta_{dep_3} = 310^\circ$

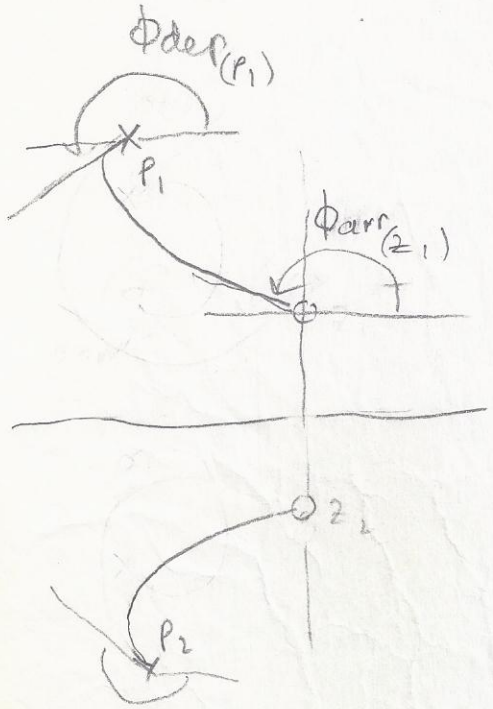
(5b)

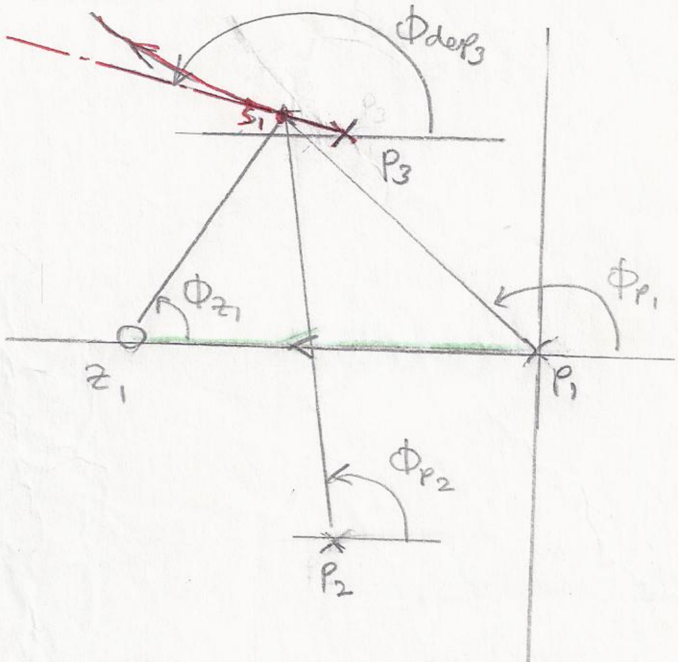
6. ציור ההסתעפות עם הציר הממשי:



<u>תמיד 90°</u>

7. <u>ציור ה R.L. ליד קוטב או אפס:</u>




$$\Phi_{Z_1} - \{\Phi_{P_1} + \Phi_{P_2} + \Phi_{dep_3}\} = (2k+1)\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Phi_{dep_3} = -(2k+1)\pi + \Sigma\{\Phi_{Z_1} - \Phi_{P_1} - \Phi_{P_2}\}$$

א.

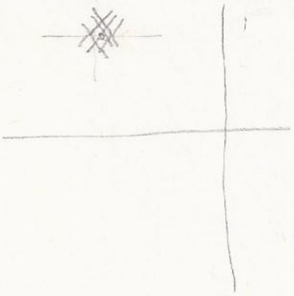
$$\boxed{\begin{aligned} \Phi_{dep} &= \pi + \Sigma\Phi_{others} \quad (\text{קטבים}) \\ \Phi_{arr} &= \pi - \Sigma\Phi_{others} \quad (\text{אפסים}) \end{aligned}}$$

זוית ←
קדם

ב. קטבים ואפסים מסדר n:

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi_{dep} &= \frac{1}{n}\{(2k+1)\pi + \Sigma\Phi_{others}\} \\ \Phi_{arr} &= \frac{1}{n}\{(2k+1)\pi - \Sigma\Phi_{others}\} \end{aligned}}$$

i:nd13



$n = 3$

$\Phi_{others} = 30°$

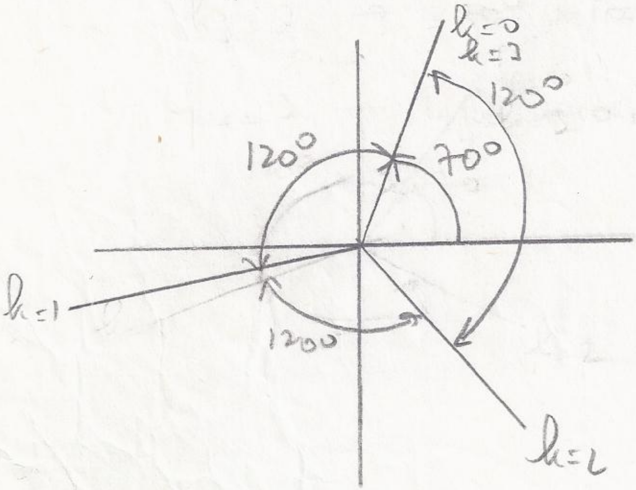
$$\Phi_{dep} = \frac{1}{3}\left\{(2k+1)\pi + 30°\right\} =$$

$$= k\frac{2\pi}{3} + \underbrace{\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{30°}{3}\right\}}$$

$$\Phi_{dep} = k\,120° + 70° \longrightarrow \quad k=0$$

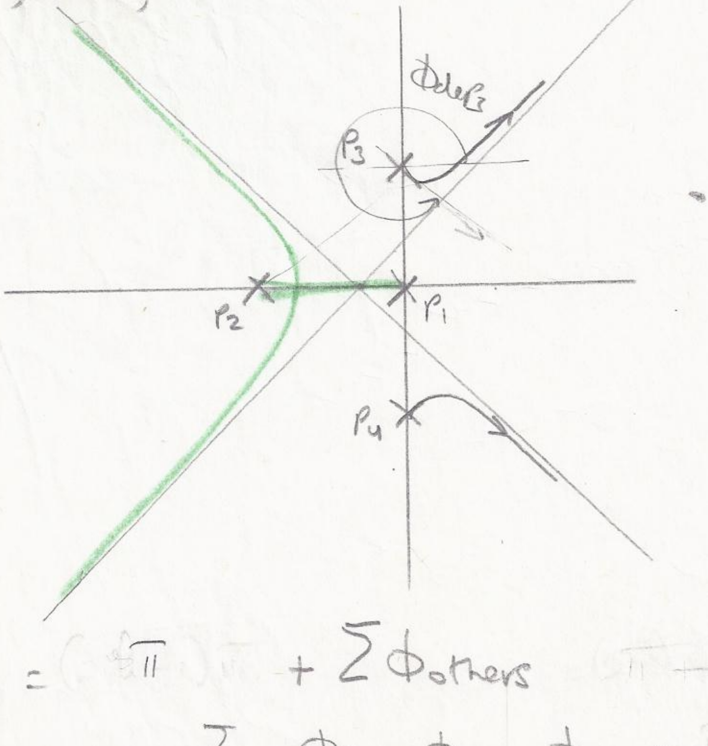
$190° \quad k=1$

$310° \quad k=2$




i:nd13

$$GH = \frac{1}{s(s+1)(s^2+1)}$$




$$c.g. = \frac{\sum -1 - \sum 0}{4} = -0.25$$

$$\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{4}$$

45, 135, 225, 315

$$\Phi_{dep3} = \pi + \sum \Phi_{others}$$

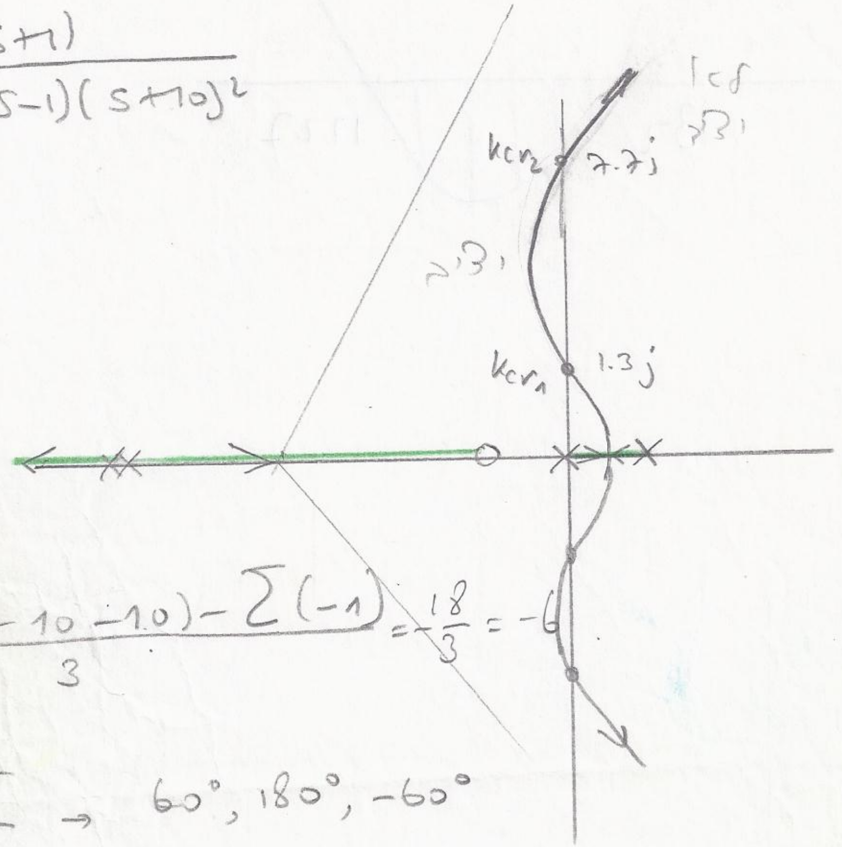
$$\sum \Phi_{others} = \sum - \Phi_{P1} - \Phi_{P2} - \Phi_{P4} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{5}{4}\pi$$

$$\Phi_{dep3} = \pi - \frac{5}{4}\pi = -\frac{\pi}{4}$$

## נקודות חיתוך עם ציר jω (8)

Cannon p. 674.

$$GH = k\,\frac{(s+1)}{s(s-1)(s+10)^2}$$




$$c.g. = \frac{\sum(1+0-10-10)-\sum(-1)}{3} = -\frac{18}{3} = -6$$

$$\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{3} \rightarrow 60°, 180°, -60°$$

$$GH + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+10)^2} + 1 = 0$$

$$k(s+1) + s(s-1)(s+10)^2 = 0$$

$$s(s^2+20s+100)(s-1) =$$

$$(s^3+20s^2+100s)(s-1)$$

$$s^4+20s^3+100s^2$$

$$-s^3-20s^2-100s$$

$$s^4+19s^3+80s^2-100s+ks+k$$

$$s^4+19s^3+80s^2+(k-100)s+k=0$$

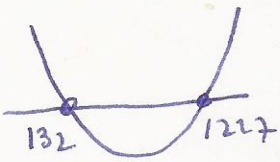
| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | $1$ | $80$ | $k$ |
| $s^3$ | $19$ | $(k-100)$ | $0$ |
| $s^2$ | $\frac{1520-(k-100)}{19}$ | $k$ | |
| $s^1$ | $\frac{(1620-k)(k-100)-k(19^2)}{(1620-k)}$ | $0$ | |
| $s^0$ | $k$ | | |

$k < 1620$

$s^2 \rightarrow \quad 1620 - k > 0$

$s^1 \rightarrow \quad -k^2 + 1720\,k - 162000 - 361\,k > 0$

$k^2 - 1359\,k - 162000 < 0$




$K_{1,2} \Leftarrow 679.5 \pm 547.5 \quad \boxed{132 < k < 1227}$

$K_{cr_1} \qquad K_{cr_2}$

$s^0 \rightarrow \quad k > 0$

: $s^2$ fo שורה

$$\frac{1520 - (k-100)}{19} s^{\cancel{4}\,2} + k\,\cancel{s^2} = 0 \rightarrow$$

$\Leftarrow \quad K_{cr_1} = 132$    ב'3)

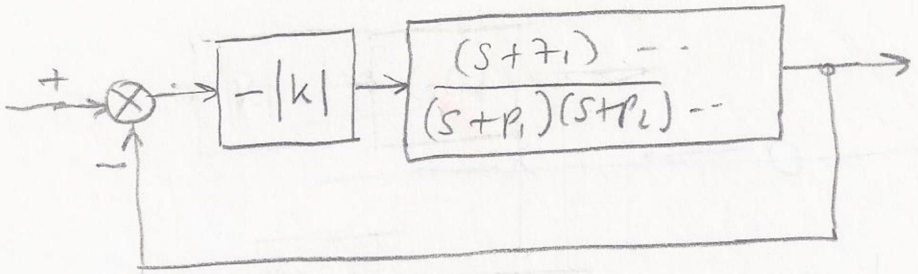
$$78.3\, s^{\cancel{4}\,2} + 132\,\cancel{s^2} = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} s_1 = 0 \\ s_2 = 1.3j \\ s_3 = -1.3j \end{array}\right\}$$

$\Leftarrow \quad K_{cr_2} = 1227$    ב'3)

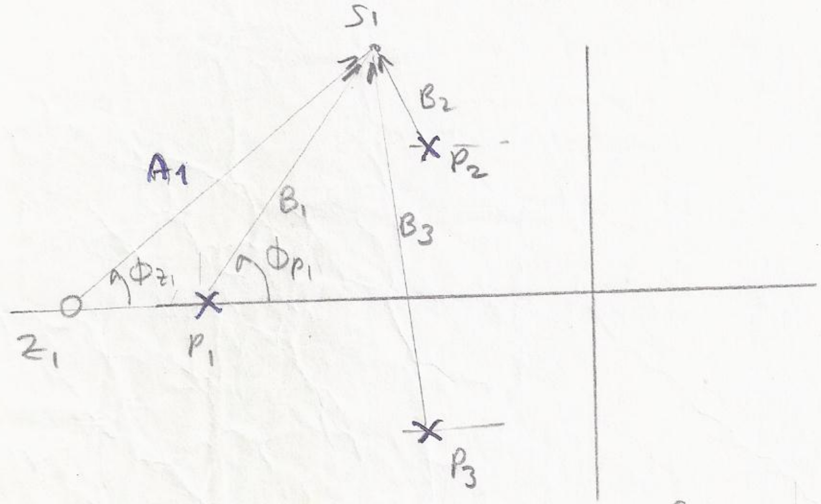
$$\frac{1520 - (1227 - 100)}{19} s^{\cancel{4}\,2} + 1227\,\cancel{s^2} = 0$$

$$20.68\, s^{\cancel{4}\,2} + 1227\,\cancel{s^2} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} s_1 = 0 \\ s_2 = +7.7j \\ s_3 = -7.7j \end{array}$$

$-\infty < k < 0$ (Zero Angle R.L.) R.L עבור k שלילי




$$G(s_1)\,H(s_1) = -|k|\frac{(s_1+z_1)\;\cdots}{(s_1+p_1)(s_1+p_2)\;\cdots} = -|k|\frac{A_1}{B_1 B_2}e^{j\{\phi_{z_1}-\phi_{p_1}-\phi_{p_2}-\phi_{p_3}\}}$$




$s_1$ תהיה נקודה על ה R.L אם:

$$G(s_1)\,H(s_1) + 1 = 0 \rightarrow$$

$$G(s_1)\,H(s_1) = -1 \Rightarrow -|k|\frac{A_1}{B_1 B_2 B_3}e^{j\Sigma\phi} = -(1) = -e^{k2\pi j}$$

(1) $|k|\frac{A_1}{B_1 B_2 B_3} = 1$ כמו קודם!

(2) $\Sigma\phi = k\cdot 2\pi$ $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2$

# תוספת בכללים עבור $-\infty<k<0$ (ZARL)

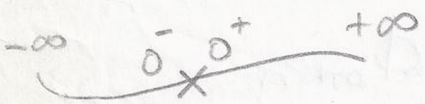
א. על הציר הממשי קיים ה-R.L. בכל נקודה שמימינה מספר <u>זוגי</u> של $Z+P$

ב. ה-R.L. עובר מ-$\infty$- ל-$0^-$

ה-R.L. מתחיל $(k=-\infty)$ באפסים

ומסתיים בקטבים $(k=0^-)$

(הקטב הוא נקודת מעבר של ה-RL בין $0^-$ ל-$0^+$)




ג. זוית האסימפטוטות של ה-R.L:

$$\alpha_k=\frac{2k\pi}{P-Z} \qquad k=0,\pm 1,\pm 2,$$

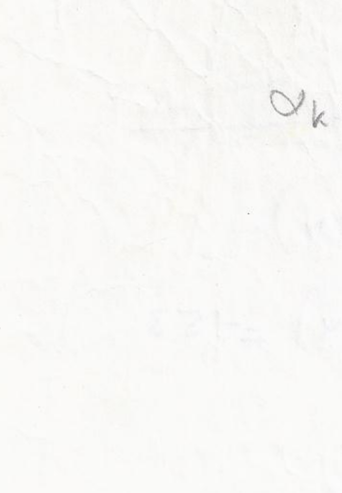
<u>הערה:</u>

אלה הם חוצאי הזוית בין האסימפטוטות RL−180° עבור $k\to+\infty$

<u>לדוגמה:</u> $P-Z=3 \Leftarrow$

$$\alpha_k=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\pm 60,180 \qquad k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$$

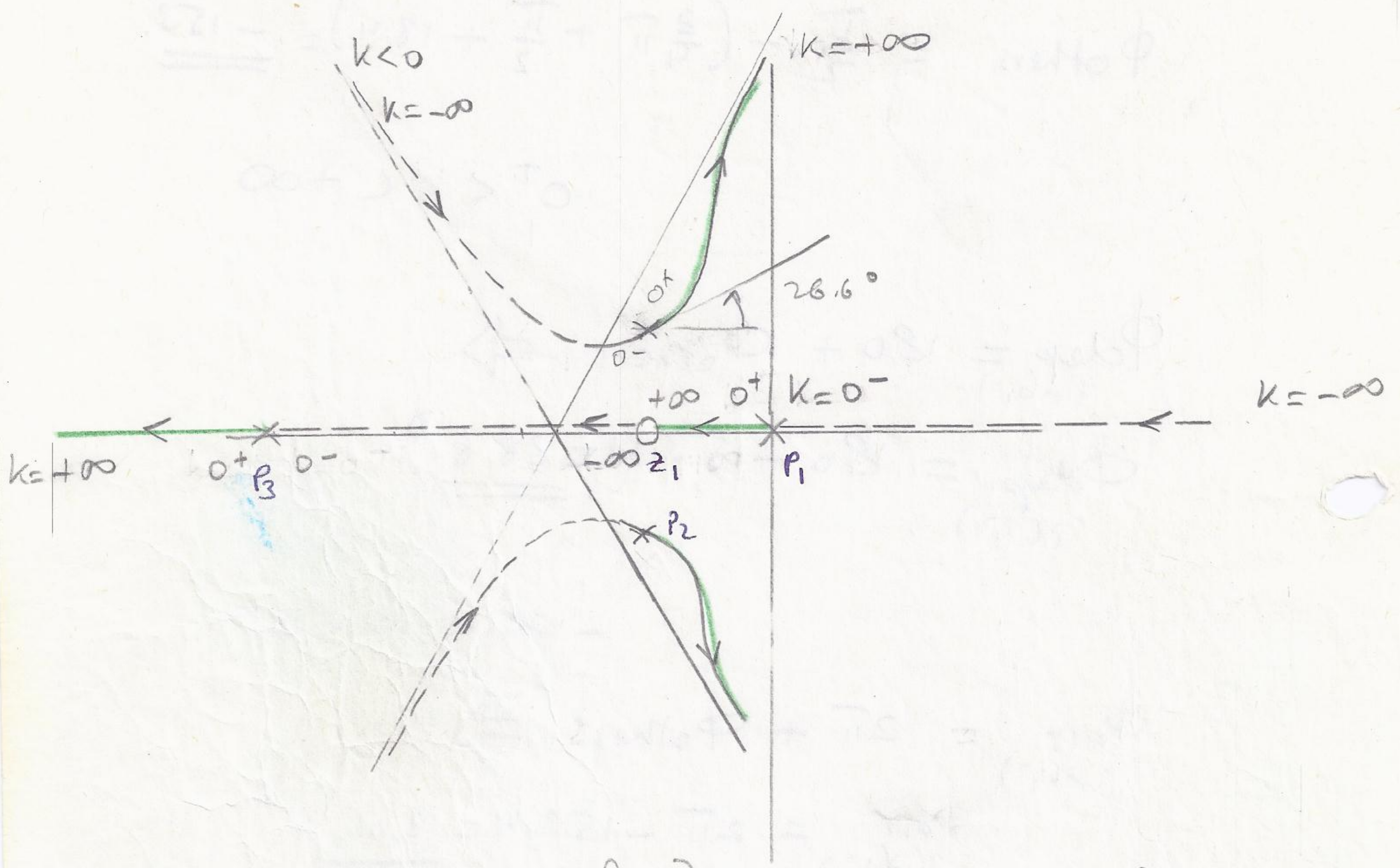
$0^+<k<+\infty$




$$\text{ZARL:}\ \alpha_k=\frac{2k}{3}\pi=0,120,-120^\circ$$

דוגמה :

$$G(s)H(s)=\frac{k(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$




$$0^+<K<\infty \rightarrow \alpha_h=\frac{(2h+1)}{3}\pi = 60^\circ, 180^\circ, -60^\circ$$

$$-\infty<k<0^- \rightarrow \alpha_h=\frac{2h}{3}\pi = \underline{0^\circ}, 120, 240^\circ$$

$$c.g.=\frac{\Sigma(0-1-1-4)-\Sigma(-1)}{3}=-\frac{5}{3}=-1.66$$

הסבר למה אין מה לחפש ב $-\infty<k<0^-$ !