

חדו"א 2 (104014) מועד א' אביב תשע"א 4.7.2011

- בשאלות 1 ו- 8 יש לכתוב את התשובה בתוך המשבצת ללא כל הסבר.
- בשאר השאלות יש לכתוב את התשובות במקום המיועד **בשאלון**. אין להוסיף דפים (לא יבדקו).
- יש לנמק היטב את הטיעונים, אך כתיבה מיותרת ולא ממוקדת עלולה לגרוע מהציון.
- שימוש בכל חומר עזר או במחשבון אסור. טלפונים ניידים (מכובים) יש להשאיר בתיק.
- אנא, השתמשו בעט שחור או כחול, **ולא בעפרון**.
- בעת המבחן המרצים יטפלו רק בתקלות או אי בהירות מהותית, **ולא יענו על שאלות תוכן**.

בהצלחה!

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	**

זאת הגירסה 1 של שאלה 1

לכל טענה סמנו "נכון" או "לא נכון". תשובה מוצלחת שווה 2 נק', תשובה שגויה מורידה 0.5 נק' ואי מלוי' משבצת משמעותו 0 נק'. ציון השאלה יעוגל כלפי מעלה, ולא יהיה פחות מ-0.

•₁ לכל שני וקטורים $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$, אם $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ אז $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq 1$ ☐ נכון ☐ לא נכון

•₂ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות ב- (x_0, y_0) , דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) ☐ נכון ☐ לא נכון

•₃ $f(x, y, z) = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$ דיפרנציאבילית ב- $(\pi, 0, -\frac{\pi}{3})$ ☐ נכון ☐ לא נכון

•₄ אם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) ו- $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ אז $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ ניצב לגרף של f ב- $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ☐ נכון ☐ לא נכון

•₅ ההיפרבולואיד $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ קשיר ☐ נכון ☐ לא נכון

•₆ אם f'_x, f'_y רציפות מחוץ לראשית אז $\oint_{x^2+y^2=1} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = 0$ ☐ נכון ☐ לא נכון

•₇ $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. אם $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ ו- $f''_{xx}(0, 0) < 0, f''_{yy}(0, 0) < 0$ אז ל- f יש מקסימום מקומי ב- $(0, 0)$ ☐ נכון ☐ לא נכון

זאת הגירסה 2 של שאלה 1

לכל טענה סמנו "נכון" או "לא נכון". תשובה מוצלחת שווה 2 נק', תשובה שגויה מורידה 0.5 נק' ואי מלוי' משבצת משמעותו 0 נק'. ציון השאלה יעוגל כלפי מעלה, ולא יהיה פחות מ-0.

•₁ לכל שני וקטורים $\vec{u}$ ו- $\vec{v}$, אם $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ אז $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq 1$ ☐ נכון ☐ לא נכון

•₂ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות ב- (x_0, y_0) , דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) ☐ נכון ☐ לא נכון

•₃ $f(x, y, z) = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$ דיפרנציאבילית ב- $(\pi, 0, -\frac{\pi}{3})$ ☐ נכון ☐ לא נכון

•₄ אם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) ו- $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ אז $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ ניצב לקו הגובה של f העובר ב- (x_0, y_0) ☐ נכון ☐ לא נכון

•₅ ההיפרבולואיד $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$ קשיר ☐ נכון ☐ לא נכון

•₆ קיימת f עם f'_x, f'_y רציפות מחוץ לראשית כך ש- $\oint_{x^2+y^2=1} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \neq 0$ ☐ נכון ☐ לא נכון

•₇ $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. אם $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ ו- $f''_{xx}(0, 0) > 0, f''_{yy}(0, 0) < 0$ אז ל- f יש נקודת אוקף ב- $(0, 0)$ ☐ נכון ☐ לא נכון

שאלה 2. (מתרגילי הבית) מצאו את הגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^4 + y^4}$ או הוכיחו שהוא לא קיים.

הגבול לא קיים

$$\frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^4 + y^4} = \underbrace{\frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^4}$$

וזאת כי $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$ (למשל מכלל לופיטל). אם כן הגבול המבוקש קיים אם ורק

אם קיים $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^4}$. אבל לאורך המסלולים הישרים $y = mx, m \in \mathbb{R}$, נקבל

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + m^2 x^2)^2}{x^4 + m^4 x^4} = \frac{(1 + m^2)^2}{1 + m^4}$$

וגבול זה תלוי ב- m .

נסיק ש- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^4}$ לא קיים ולכן גם $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^4 + y^4}$ לא קיים.

שאלה 3. (אין קשר ישיר בין שני סעיפי השאלה)

7 נק' **א.** הראו שטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2 x}$ מתכנס ב- $[0, \infty)$ לפונקציה רציפה.

הפונקציות $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x}$ רציפות בקטע $I = [0, \infty)$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ ו- $x \in I$

מקיימות $|f_n(x)| = \begin{cases} \frac{1}{x} + n^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \leq \frac{1}{n^2}$ הקריטריון של וויארשטראס

קובע שאם הפונקציות $f_n(x)$ רציפות ב- I , לכל $n \in \mathbb{N}$ ו- $x \in I$

ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ אז טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ מתכנס (במידה שווה) לפונקציה

רציפה. כאן $a_n = \frac{1}{n^2}$ בוודאי מקיים את התנאי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ ובכך הטענה הוכחה.

11 נק' **ב.** $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} + \dots$. הראו ש- f מתכנסת ב- $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ומצאו את $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

$$f(x) = y - \frac{y^2}{3} + \frac{y^3}{4} - \frac{y^4}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} y^n \quad \text{נסמן } y = x^2 \text{ ואז}$$

רדיוס ההתכנסות (עבור y) של טור זה נתון ע"י

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = 1$$

ולכן הטור מתכנס עבור $y \in (-1, 1)$ (כאן, בפועל, $y \geq 0$) ובעצם גם ב- $y = 1$.

נסיק שהטור של $f(x)$ מתכנס עבור $x \in (-1, 1)$ (ובעצם גם ב- $x = \pm 1$) ובפרט ב- $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$f(x) = x \left(\overbrace{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots}^{g(x)} \right) \quad \text{נרשום}$$

ההתכנסות ניתן לגזור את טור החזקות $g(x)$ איבר-איבר, ונקבל (טור הנדסי)

$$g'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

ומכאן, ע"י אינטגרציה פשוטה, נובע ש- $g(x) = (\arctan x) + c$ $c=0$ כי $g(0)=0$.

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \overbrace{\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\pi}{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}\pi}{18}} \quad \text{לבסוף } f(x) = x \arctan x \text{ ובפרט}$$

8 נק' **שאלה 4.** הקבוצה $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x^3 - y^3 - 3xyz = 2 \\ x^2 - y^2 + z^4 - z = 0 \end{cases} \right\}$ מהווה, בסביבת הנקודה $M(1, -1, 0)$, עקום חלק C העובר דרך M (לא צריך להוכיח זאת). מצאו הצגה פרמטרית של המשיק ל- C בנקודה M .

נסמן $f_1(x, y, z) = x^3 - y^3 - 3xyz$ ו- $f_2(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^4 - z$, שתיהן פולינומים ולכן גזירות. העקום C מוכל במשטח הרמה S_1 של f_1 (ברמה 2) וגם במשטח הרמה S_2 של f_2 (ברמה 0). אם כן, כל ווקטור משיק $\vec{v}$ לעקום C בנקודה $M(1, -1, 0)$ ניצב גם ל-

$$\vec{\nabla} f_1(1, -1, 0) = 3(x^2 - yz)\hat{i} - 3(y^2 + xz)\hat{j} - 3xy\hat{k} \Big|_{(1, -1, 0)} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k} \quad \text{וגם ל-}$$

$$\vec{\nabla} f_2(1, -1, 0) = 2x\hat{i} - 2y\hat{j} + (4z^3 - 1)\hat{k} \Big|_{(1, -1, 0)} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}.$$

אם כן, כל ווקטור משיק ל- C ב- M הוא כפולה סקלארית של המכפלה הווקטורית של שני הווקטורים האלה: $(3\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}) \times (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = \dots = -3\hat{i} + 9\hat{j} + 12\hat{k}$ (אנחנו נבחר את $-\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$).

נסכם: הישר המבוקש עובר דרך $M(1, -1, 0)$ וכיוונו נתון ע"י $\vec{v} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, והוא מיוצג

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4t \end{cases} \quad -\infty < t < \infty \quad \text{פרמטרית ע"י}$$

שאלה 5. מצאו את הערך המקסימלי של $\oint_L (x^2 + xy^2 - y^2) dx + (y^3 + x^2y - \frac{2}{3}x^3) dy$, נגד כיוון השעון, על פני כל העקומים L הסגורים, חלקים למקוטעין ומוכלים ב- $\{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

משפט גרין, והיות והאינטגרל הקווי הוא נגד כיוון השעון, $P(x, y) = x^2 + xy^2 - y^2$ ו- $Q(x, y) = y^3 + x^2y - \frac{2}{3}x^3$ גזירות ברציפות (בתור פולינומים). לפי

$$\begin{aligned} \oint_L (x^2 + xy^2 - y^2) dx + (y^3 + x^2y - \frac{2}{3}x^3) dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D ((2xy - 2x^2) - (2xy - 2y)) dx dy = 2 \iint_D (y - x^2) dx dy \end{aligned}$$

כאשר D הוא התחום המוקף ע"י L . האינטגרל הכפול יהיה מקסימלי כאשר בוחרים D להיות $\{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, (y - x^2) > 0\}$ כי כל גריעה ממנו תפחית אינטגרציה של פונקציה חיובית, וכל הגדלה שלו תוסיף אינטגרציה של פונקציה שלילית.

לסיכום, העקום L האופטימלי מורכב משני חלקים, חלק מהפרבולה $y = x^2$ וחלק מהישר $y = 1$. האינטגרל עצמו שווה

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 (y - x^2) dy \right) dx &= 2 \int_{-1}^1 \left(\frac{y^2}{2} - x^2y \Big|_{x^2}^1 \right) dx = 2 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 - \frac{x^4}{2} + x^4 \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx = 2 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \boxed{\frac{16}{15}} \end{aligned}$$

שאלה 6. הראו שהמשוואה $y^3 - 6xy - 8 = 0$ מגדירה את y כפונקציה של x בעלת פולינום טיילור מסדר שני $P_2(x) = 2 + ax + bx^2$ סביב $x_0 = 0$, וחשבו את a ו- b .

מתבקשים לחלץ מהמשוואה את y כפונקציה של x בסביבת $(x_0, y_0) = (0, 2)$ (כי $P_2(0) = 2$).

$$F(x, y) = y^3 - 6xy - 8 \quad \text{גזירה ברציפות בכל מקום ו-} \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(0,2)} = 3y^2 - 6x \Big|_{(0,2)} = 12 \neq 0$$

נובע ממשפט הפונקציות הסתומות שקיימת סביבה I של $x_0 = 0$ ופונקציה $y = f(x)$ גזירה ברציפות ב- I , המקיימת $f(0) = 2$ וכך שלכל $x \in I$ מתקיים $f(x)^3 - 6xf(x) - 8 = 0$ ו-

$$(1) \quad f'(x) = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \Big|_{y=f(x)} = - \frac{-6y}{3y^2 - 6x} \Big|_{y=f(x)} = \frac{6f(x)}{3f(x)^2 - 6x}$$

(ובפרט המכנה ב- (1) לא מתאפס ב- I). אגף ימין של (1) גזיר ולכן ניתן לגזור את f' פעם נוספת:

$$(2) \quad f''(x) = 6 \frac{f'(x)(3f(x)^2 - 6x) - f(x)(6f(x)f'(x) - 6)}{(3f(x)^2 - 6x)^2}.$$

אם נציב $x = 0$ ו- $f(0) = 2$ ב- (1) נקבל $f'(0) = \frac{6 \cdot 2}{3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 0} = 1$

והצבה כעת ב- (2) תיתן $f''(0) = 6 \frac{1 \cdot \overbrace{(3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 0)}^{12} - 2 \cdot \overbrace{(6 \cdot 2 \cdot 1 - 6)}^{12}}{\underbrace{(3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 0)^2}_{144}} = 0$

הפולינום טיילור מסדר שני של f סביב $x_0 = 0$ נתון ע"י

ומכאן $a = 1$, $b = 0$ $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 2 + x$

$$\vec{G}(x, y, z) = \left(1+x+\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\hat{i} + \left(1+2y+\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\hat{j} + \left(1+3z+\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\hat{k}$$

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\} \cup \text{דרך המשטח}$$

$$\cup \{(x, y, z) \mid z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y, z) \mid z = -1, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

המשטח S הוא השפה (שלושת חלקיה) של גליל D בעל רדיוס בסיס 1 וגובה 2. כמו כן נרשום

$$\vec{G}(x, y, z) = \underbrace{\left((1+x)\hat{i} + (1+2y)\hat{j} + (1+3z)\hat{k}\right)}_{\vec{G}_1} + \underbrace{\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}_{\vec{G}_2}$$

אם כן

$$\iint_S \vec{G} \cdot \hat{n} \, ds = \iint_S \vec{G}_1 \cdot \hat{n} \, ds + \iint_S \vec{G}_2 \cdot \hat{n} \, ds = \iiint_D \operatorname{div} \vec{G}_1 \, dxdydz + \iint_S \vec{G}_2 \cdot \hat{n} \, ds$$

זאת על פי משפט הדיוורגנץ של גאוס בו יכולנו להשתמש עבור $\vec{G}_1$ כי הוא שדה גזיר ברציפות בכל $\mathbb{R}^3$, אבל לא עבור $\vec{G}_2$, לו יש סינגולריות ב- $(0, 0, 0)$ שהיא נקודה פנימית של הגליל D .

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{G}_1 \, dxdydz = 6 \operatorname{vol} D = 6\pi \cdot 1^2 \cdot 2 = \boxed{12\pi} \quad \text{ולכן} \quad \operatorname{div} \vec{G}_1 \equiv 1 + 2 + 3 = 6 \bullet$$

• נחשב את $\operatorname{div} \vec{G}_2$ מחוץ ל- $(0, 0, 0)$: (תוך סימון $(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \quad \text{וכמו כן} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = \frac{r^3 - x \cdot 3r^2 \cdot \frac{x}{r}}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

$$\operatorname{div} \vec{G}_2 = \frac{3r^2 - 3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} \equiv 0 \quad \text{ולכן} \quad \text{פרוש הדבר שניתן להחליף (שוב משפט גאוס)}$$

את S בכל משטח סגור חלק אחר שמקיף את $(0, 0, 0)$. נבחר את ספירת היחידה $\tilde{S}$:

$$\vec{r}'(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\vec{r}'_\varphi \times \vec{r}'_\theta = (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \varphi) \quad [\text{אכן פונה למעלה בחצי הספירה העליונה}]$$

$$\iint_{\tilde{S}} \vec{G}_2 \cdot \hat{n} \, ds = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi (\sin^3 \varphi \cos^2 \theta + \sin^3 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin \varphi) = \dots = \boxed{4\pi}$$

$$\iint_S \vec{G} \cdot \hat{n} \, ds = 12\pi + 4\pi = \boxed{16\pi} \quad \text{לסיכום}$$

שאלה 8. יהי C העקום $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $z = \frac{\sin 2\theta}{2}$.

א. העקום C מוכל בגרף של הפונקציה $z = xy$ וגם מוכל בגליל $x^2 + y^2 = 1$ 9 נק'

ב. בדקו את נכונות משפט סטוקס עבור העקום C והמשטח S מסעיף א' והשדה הוקטורי

$$\vec{F}(x, y, z) = -y\hat{i} + x\hat{j} + (x^2 - y^2)\hat{k}$$

יש לפרט את כל החישובים.

יהי S החלק של גרף הפונקציה $z = xy$ שמכיל את הנקודות (x, y, z) עבורן $x^2 + y^2 \leq 1$. משפט סטוקס קובע ש-

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} ds$$

כאשר הכיוון על C הוא $\theta : 0 \rightarrow 2\pi$ ולפי חוק יד ימין, $\hat{n}$ פונה כלפי מעלה. נחשב את שני האגפים מפורשות:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left((-\sin \theta)(-\sin \theta) + (\cos \theta)(\cos \theta) + (\cos 2\theta)(\cos 2\theta) \right) d\theta \\ &= 2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 4\theta}{2} d\theta = \boxed{3\pi} \end{aligned}$$

מצד שני $\text{rot} \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & x^2 - y^2 \end{pmatrix} = -2y\hat{i} - 2x\hat{j} + 2\hat{k}$ והוקטור הניצב למשטח

הוא $\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = -y\hat{i} - x\hat{j} + \hat{k}$ (אכן כלפי מעלה). מכאן $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = xy \end{cases}$

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} ds &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \left((-2y)(-y) + (-2x)(-x) + (2)(1) \right) dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 + 1) r dr = 4\pi \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \boxed{3\pi} \end{aligned}$$

ושני האגפים אכן שווים.

שאלה 9. שדה וקטורי $\vec{F}(x, y, z)$, המוגדר ורציף בכל נקודה פרט לראשית, מקיים את התכונה
 $\vec{F}(tx, ty, tz) = \frac{1}{t^2} \vec{F}(x, y, z)$ לכל $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ו- $t > 0$. נסמן ב- S_a את הספירה
 $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, וב- $\hat{n}$ את וקטור היחידה שניצב ל- S_a כלפי חוץ.

הראו שהאינטגרל המשטחי $\iint_{S_a} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds$ אינו תלוי ברדיוס a של הספירה S_a .

בדומה לשאלה 7, הפרמטריזציה של S_a נתונה ע"י

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (a \sin \varphi \cos \theta, a \sin \varphi \sin \theta, a \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\vec{r}'_\varphi \times \vec{r}'_\theta = a^2 (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \varphi)$$

ואז חישוב השטף נותן

$$\begin{aligned} \iint_{S_a} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \left(\vec{F}(a \sin \varphi \cos \theta, a \sin \varphi \sin \theta, a \cos \varphi) \cdot a^2 (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \varphi) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \left(\frac{1}{a^2} \vec{F}(\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) \cdot a^2 (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \varphi) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \left(\vec{F}(\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) \cdot (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \varphi) \right) \end{aligned}$$

(כאשר השוויון השני נובע מהתכונה של $\vec{F}$) וגודל זה אינו תלוי ב- a .

(הערה: אפילו אם נניח ש- $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, אין שום סיבה שהדיוורגנץ שלו יתאפס זהותית. לא זאת הסיבה.)